

Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах

В статье рассматриваются все основные подходы к моделированию волатильности цен акций и обменных курсов в связи с эмпирическими свойствами соответствующих временных рядов. Большое внимание уделяется свойствам волатильности на множественных временных горизонтах и характеристикам эконометрических моделей при временном агрегировании. Приводится подробный обзор моделей каскада волатильности на множественных горизонтах, получивших распространение в последнее десятилетие.

1. Введение

Моделирование цен акций является основой финансовой экономики и, в частности, теорий управления инвестиционным портфелем и оценки финансовых инструментов. Так называемая современная теория управления портфелем (далее — МРТ, от англ. modern portfolio theory), включающая принцип диверсификации Марковица [Markowitz (1952)] и модель оценки капитальных активов Шарпа—Линтнера [Sharpe (1964)]; [Lintner (1965)], устарела именно потому, что заложенная в нее ключевая предпосылка о динамике цен оказалась нереалистичной и даже в практическом смысле опасной. Доходности акции не являются независимыми между собой во времени реализациями нормально распределенной случайной величины. Однако поиск новой модели до сих пор продолжается. Мы рассмотрим эмпирические свойства цен акций и различные популярные модели ценовой динамики, указывая на особую роль понятия «волатильность цен».

Объектом нашего исследования выступает изменчивость цен акций, которую в финансах принято обозначать термином «волатильность» (volatility). Обычно введение научной терминологии имеет целью уточнить какие-либо представления об объекте, однако в данном случае приходится говорить, скорее, об обратном. В зависимости от контекста и точки зрения автора слово «волатильность» в финансах может означать явление изменчивости цен (variability). Именно в этом смысле мы употребили его выше, а также оценку стандартного отклонения доходностей, финансовый риск вообще, параметр ценовой модели либо определенного вида случайный процесс. Мы будем использовать понятие волатильности в его исконном значении изменчивости. Прежде чем говорить о конкретных моделях, рассмотрим несколько подробнее само понятие. Это позволит нам проследить логику развития связанных с ним моделей.

Первая модификация значения термина связана с тем, что название явления изменчивости стало применяться к наиболее очевидному способу ее оценки — стандартному откло-

нению доходности акций. Эта трактовка логично встраивается в концепцию МРТ, которая также называется теорией среднего — вариации (mean — variance), поскольку именно среднее значение и вариация (дисперсия) отражают всю полезную информацию об активе, если его доходность распределена по нормальному закону, как предполагает классическая теория Марковица [Markowitz (1952)]¹. Заметим, что в рамках этой теории риск моделируется статически (каждая акция имеет некоторый присущий ей неизменный уровень риска), поэтому «волатильность — стандартное отклонение» может трактоваться как оценка постоянного параметра в простейшей модели доходности акций. Это определение волатильности укоренилось и употребляется до сих пор в профессиональной среде.

Появление в 1973 г. модели оценки опционов Блэка—Шоулза—Мертон [Black and Scholes (1973)]; [Merton (1973)], помимо прочего, изменило представление о волатильности. Блэк и Шоулз используют непрерывную диффузию (геометрическое броуновское движение) для моделирования цен:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

где S_t — цена акции;

μ — неслучайный тренд;

W_t — стандартный винеровский процесс (броуновское движение).

В данной модели параметр σ также называется волатильностью. Поскольку логарифмы доходностей за любые интервалы времени, рассчитанные по ценам следующих (1), распределены по нормальному закону, модель также называют логнормальной диффузией.

Очень скоро стало ясно, что уравнение (1) плохо описывает действительность. Параметры уравнения (1) однозначно задают цены опционов для любых дат и цен исполнения. Поэтому, наблюдая цены различных опционов на рынке, мы можем с помощью функции, обратной формуле Блэка—Шоулза, оценить σ . Получаемая таким способом оценка называется вмененной волатильностью (implied volatility) в противоположность исторической волатильности (historical volatility). Вопреки предсказанию модели Блэка—Шоулза эмпирические результаты показывают, что вмененная волатильность неодинакова для опционных контрактов с различными параметрами. Этот феномен известен как «улыбка волатильности» (volatility smile). Он получил название из-за характерной выпуклой формы графика оценки σ в зависимости от цены исполнения опциона.

В русскоязычной литературе утвердился термин «ожидаемая» волатильность как перевод английского слова implied. Его употребление мотивировано тем, что волатильность изменяется во времени и для оценки опционов следовало бы использовать будущую волатильность, а не наблюдавшуюся в прошлом. Тогда несовпадение исторической и вмененной волатильностей можно было бы объяснить тем, что инвесторы ожидают изменения волатильности в будущем. Однако, с нашей точки зрения, отождествление ожидаемой и вмененной волатильностей некорректно, поскольку вмененная волатильность — всего

¹ В теории диверсификации Марковица может использоваться альтернативная упрощающая предпосылка: функция полезности репрезентативного инвестора имеет квадратичную форму, т. е. зависит лишь от первых двух моментов распределения доходности.

лишь результат использования конкретной модели оценки опционов. Значения вмененной волатильности меняются в зависимости от цен исполнения и других характеристик опционов. Нельзя предполагать, что ожидания инвесторов в отношении изменчивости цен акций зависят от свойств производных финансовых инструментов. Указанное несовпадение — следствие ошибочности предпосылок модели, а не изменяющихся ожиданий. Поэтому мы отказываемся от распространенной, но неудачной терминологии в пользу менее употребимого, но более точного термина².

Сказанное выше не означает, что вмененная волатильность не содержит полезной информации о будущей изменчивости цен. Действительно, вмененная волатильность широко используется для прогноза волатильности. В оценке производных инструментов вмененная волатильность играет ключевую роль, поскольку позволяет экстраполировать наблюдаемые рыночные данные для оценки новых производных инструментов [Dupire (1993, 1994)]; [Avellaneda, Friedman, et al. (1997)]. Несмотря на эти успехи, более адекватная, чем (1), модель для рыночных цен все же была бы полезна как для оценки производных инструментов, так и для управления инвестиционным портфелем. Уже в работе Мертона [Merton (1973)] рассматривается случай, когда параметр волатильности σ зависит от времени. Еще ранее Мандельброт [Mandelbrot (1963)] описывает эмпирические свойства доходностей, которые не соответствуют модели логнормальной диффузии, предлагая рассматривать более широкий класс Леви-устойчивых вероятностных распределений. Дальнейшее развитие финансовой теории привело к тому, что волатильность сама стала рассматриваться не как параметр (пусть даже изменяющийся во времени), а как случайный процесс.

Таким образом, термин «волатильность» в финансах претерпел круговую эволюцию: от обозначения явления изменчивости к статистической оценке, затем к параметру модели, и, наконец, к случайному процессу, который вновь характеризует изменчивость цен в целом. Более точно волатильность можно охарактеризовать через структуру условных моментов второго порядка для распределений доходности, где в качестве информационного множества выступают прошлые наблюдения цен. В простейшем случае (1) эта характеристика дается одним параметром, в более сложных случаях — самостоятельным случайным процессом.

Данную статью мы начинаем с обзора эмпирических свойств волатильности (так называемых «стилизированных фактов») и затем описываем традиционные подходы к ее моделированию (условная гетероскедастичность и стохастическая волатильность), которые позволяют в той или иной степени учитывать эти свойства. Хотя многие предложенные модели достаточно хорошо описывают отдельные эмпирические факты, ни одна из них не может считаться полностью удовлетворительной для описания всей структуры изменчивости цен. В частности, большинство традиционных моделей не позволяют реалистично учитывать динамику доходностей одновременно на различных временных горизонтах (от нескольких минут до нескольких месяцев), что имеет большой теоретический и практический интерес. При этом стилизованные факты в отношении волатильности тесно связаны с особенностями динамики доходностей, рассматриваемых на различных горизонтах (т.е. соответствующих различной частоте наблюдения цены одного и того же актива). Мы рассматриваем современные модели условной гетероскедастичности и стохастической волатильности, ис-

² Еще одним вариантом было бы использование кальки с английского — «имплицитированная» волатильность, его мы отвергаем по стилистическим соображениям.

пользующие концепцию множественных горизонтов, и обсуждаем основные нерешенные задачи, связанные с этой концепцией.

2. Эмпирические свойства волатильности

Многочисленные эмпирические исследования показывают, что финансовые временные ряды обладают рядом общих свойств, которые принято называть «стилизированными фактами». Реалистичная модель цен должна воспроизводить эти свойства, поэтому кратко охарактеризуем их. Более подробный обзор можно найти в [Cont (2001)].

- **Избыточная волатильность.** Наблюдаемую степень изменчивости цен на акции трудно объяснить изменениями фундаментальных экономических характеристик. В частности, большие по абсолютному значению доходности (как положительные, так и отрицательные) часто оказывается невозможным объяснить поступлением на рынок новой информации [Cutler, Poterba, et al. (1989)].

- **Отсутствие линейной корреляции доходностей.** Доходности акций, взятые за достаточно длинные интервалы времени (один день и более), имеют статистически незначимую линейную корреляцию. Это согласуется с гипотезой эффективности рынка [Fama (1970)] и основными результатами MPT, использующими мартингальные меры.

- **Кластеризация волатильности и долгая память в абсолютных значениях доходностей.** Временной ряд значений доходности, взятых по модулю, характеризуется значимой автокорреляцией, причем автокорреляционная функция убывает медленно (так называемый эффект дальних корреляций). Таким образом, наблюдаются продолжительные периоды высокой и низкой волатильности [Bollerslev, Chou et al. (1992)]; [Ding, Granger, et al. (1993)]; [Ding and Granger (1996)].

- **Связь между объемом торгов и волатильностью.** Волатильность цен положительно коррелирована с объемом торгов, причем для последнего характерны те же свойства длинной памяти, что и для абсолютных значений доходности [Lobato and Velasco (2000)].

- **Островершинное распределение доходностей.** Безусловное вероятностное распределение дневных доходностей характеризуется «тяжелыми» хвостами, т. е. высокой вероятностью наблюдать экстремальные значения [Mandelbrot (1963)]; [Fama (1965)].

- **Форма вероятностных распределений доходности меняется в зависимости от интервалов времени, за которые рассчитываются доходности** [Ghashghaie, Breymann, et al. (1996)]; [Arneodo, Muzy, et al. (1998)]. Распределения логарифмических доходностей за длительные интервалы времени близки к нормальному закону, тогда как распределения доходностей за короткие интервалы времени (5–30 мин) характеризуются «тяжелыми» хвостами.

Из указанных стилизованных фактов нас особенно будут интересовать свойства, связанные с автокорреляционной функцией (autocorrelation function, ACF) и формой вероятностного распределения доходностей и их амплитуд. Дадим определение феномена длинной памяти, о котором говорилось в предыдущем разделе, в терминах автокорреляционной функции³.

³ Более подробное обсуждение свойств процессов с длинной памятью см., например, [Samorodnitsky (2007)].

Стационарный стохастический процесс X_t с конечной вариацией имеет длинную память, если его автокорреляционная функция $C(\tau) = \text{corr}(X_t, X_{t-\tau})$ при $\tau \rightarrow \infty$ убывает с увеличением лага не медленнее, чем по степенному закону (т. е. с гиперболической скоростью):

$$C(\tau) \sim \frac{L(\tau)}{\tau^{1-2d}}, \quad (2)$$

где $0 < d < \frac{1}{2}$ и функция $L(\cdot)$ для $\forall x > 0$ при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяет $\frac{L(xt)}{L(t)} \rightarrow 1$.

Процесс имеет короткую память, если его автокорреляционная функция убывает не быстрее, чем экспоненциально, т. е.:

$$\exists A > 0, c \in (0, 1) : |C(\tau)| \leq A c^\tau. \quad (3)$$

В данном определении техническое условие, налагаемое на функцию $L(\cdot)$, означает, что для бесконечного лага τ эта функция должна варьировать бесконечно слабо. Подчеркнем также, что в определении речь идет о теоретической ACF, определяемой моделью, а не о ее выборочной оценке. Как мы увидим, во многих случаях выборочная ACF имеет свойства, похожие на задаваемые выражением (2), однако теоретическая ACF такими свойствами не обладает.

Долгая память также может быть охарактеризована для временного ряда X_t через расхождение его спектральной плотности у основания по степенному закону:

$$\Psi_x(u) \sim c_\Psi |u|^{-\alpha}, \quad (4)$$

где $\Psi_x(\cdot)$ — функция спектральной плотности;

α — масштабирующий параметр;

c_Ψ — некоторая константа.

Как мы видели в предыдущем разделе, форма псевдоспектра для абсолютных значений доходности не противоречит условию (4).

Проиллюстрируем эмпирические свойства доходностей на данных временных рядов фондовых индексов. Используем для этого два типа данных: собранные с высокой частотой (внутридневные наблюдения) за небольшой отрезок времени и собранные с дневной частотой за очень большой промежуток времени. Значения французского индекса CAC40 за период с 20 марта 1995 г. по 29 декабря 2006 г. наблюдаются ежедневно с 15-минутными интервалами (100 881 наблюдение), а для американского промышленного индекса Доу—Джонса с 26 мая 1896 г. по 10 октября 2007 г. наблюдаются ежедневные цены закрытия (28 864 наблюдения)⁴.

Определим доходность в момент времени $t \in 1, \dots, T$ за интервал времени τ как изменение логарифма цены акции S :

$$r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-\tau}). \quad (5)$$

⁴ За рамками статьи остается задача обработки анализируемых наблюдений при наличии пропущенных данных, а также эффект периодичности степени изменчивости доходности при высокочастотных данных — *Прим. науч. ред.*

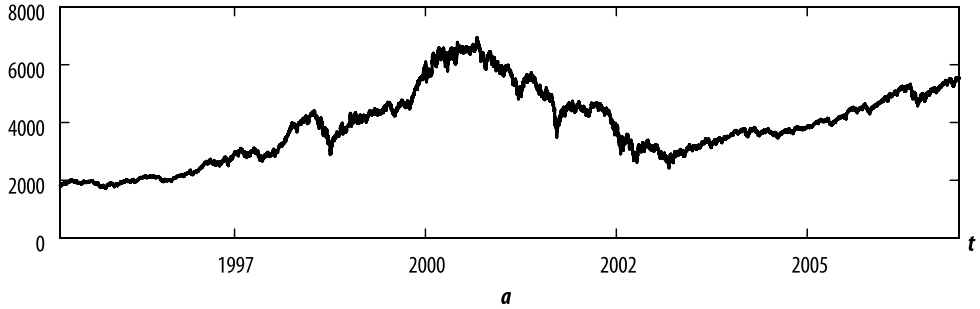
За меру волатильности (степени изменчивости цен без учета знака) будем принимать $|r_t|$. Отметим, что сходные результаты можно наблюдать и для квадратов доходности, и в общем для $|r_t|^\alpha$ [Bollerslev, Chou, et al. (1992)]; [Ding, Granger, et al. (1993)]; [Ding and Granger (1996)]. Однако для $\alpha = 1$ свойства являются более выраженными [Ding, Granger, et al. (1993)]; [Ghysels, Santa-Clara, et al. (2006)]; [Forsberg and Ghysels (2007)].

На рис. 1 и 2 представлены временные ряды значений индекса, а также доходности, рассчитываемые за разные интервалы времени. Для индекса CAC40 рассчитываются 15-минутные, дневные и недельные доходности, для промышленного индекса Доу Джонса — дневные, месячные и квартальные доходности. На данных для обоих индексов можно наблюдать феномен кластеризации волатильности — периоды высоких (как положительных, так и отрицательных) значений доходности, достаточно продолжительные и устойчивые, сменяются периодами сравнительно низкой волатильности. При этом периоды роста индекса редко сопровождаются высокой волатильностью. Как правило, большие колебания доходностей наблюдаются на переломах тренда и при падениях индексов.

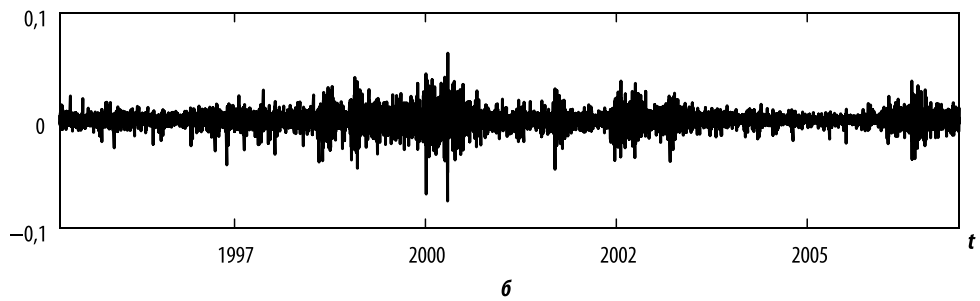
Рассмотрим форму вероятностных распределений доходностей, рассчитанных за разные интервалы времени (рис. 3 и 4). Для 15-минутных доходностей на индекс CAC40 бросается в глаза островершинность распределения: расхождение с нормальной кривой для хвостов распределения оказывается очень существенным. По мере снижения частоты наблюдений расхождение с нормальным распределением уменьшается. Этот эффект можно связать с действием центральной предельной теоремы, хотя среди исследователей нет уверенности по поводу выполнения ее предпосылок. Для недельных доходностей все еще наблюдаются «тяжелые» хвосты, особенно в левой части распределения, соответствующей негативным доходностям. И все же сравнительно небольшое количество наблюдений на этой частоте (590) не позволяет в полной мере судить о распределении экстремальных значений доходностей. Для индекса Доу—Джонса имеем сравнительно большую выборку недельных доходностей (2953 наблюдения). Экстремальные негативные доходности и здесь наблюдаются существенно чаще, чем предсказывает нормальная вероятностная модель. Для месячных наблюдений расхождения в хвостах уменьшаются, однако снова размер выборки оказывается недостаточным для окончательных выводов.

На данном этапе констатируем, что хотя по мере уменьшения частоты наблюдений распределение доходностей приближается к нормальному, приближение это происходит крайне медленно. Месячные логарифмические доходности представляют собой сумму более 600 15-минутных доходностей, поэтому при выполнении центральной предельной теоремы в классической форме следовало бы ожидать, что их распределение должно быть очень близко к гауссовскому. И все же островершинность полностью не исчезает даже на этом длинном горизонте. Как покажем далее, вопрос о том, существует ли достаточно длинный горизонт, на котором распределение доходностей является гауссовским, имеет важное значение для моделей волатильности на множественных горизонтах. Тем не менее очевидно, что возможности получить строгий эмпирический вывод нет: если такой горизонт и существует, он должен быть весьма длинным (более 3 месяцев), но для проверки нормальности на подобных горизонтах недостаточно данных (временной ряд значений промышленного индекса Доу—Джонса, который мы используем, является самым долгим из доступных на сегодняшний день в финансах).

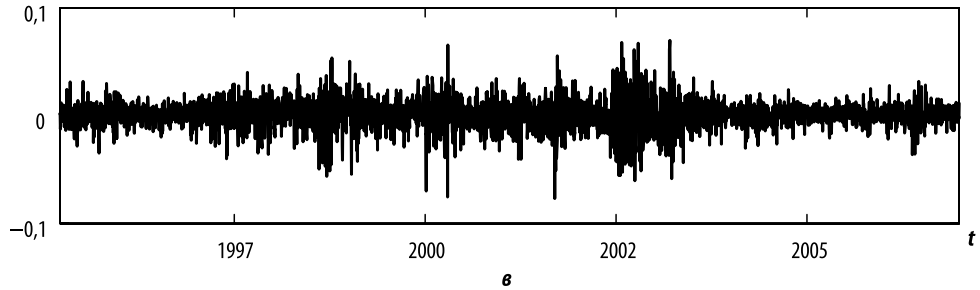
Индекс САС40



Доходность (15-мин.)



Доходность (дневная)



Доходность (недельная)

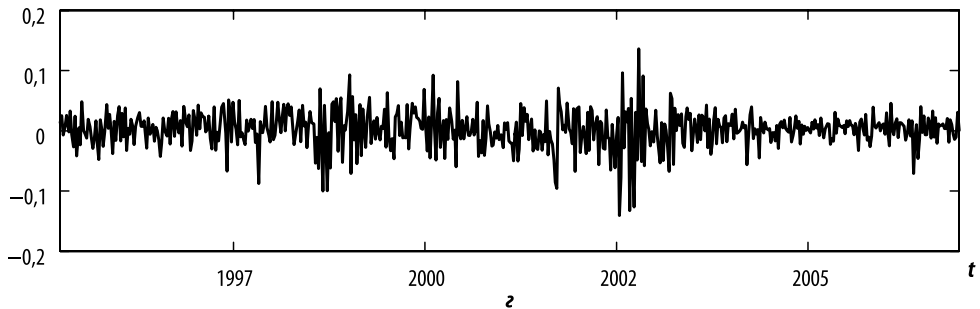
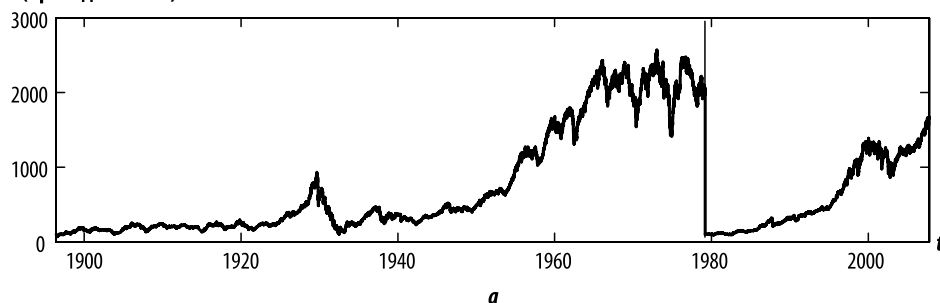


Рис. 1. Доходность на индекс САС40:

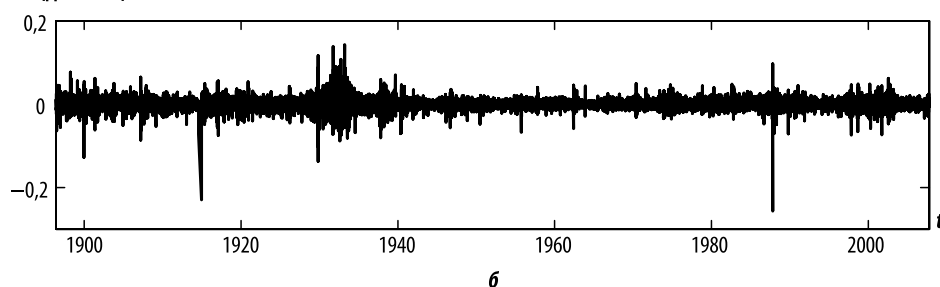
а — график значений индекса; б — график 15-минутных доходностей (100 880 наблюдений); в — график дневных доходностей (2953 наблюдения); г — график недельных доходностей (590 наблюдений)

Примечание. Euronext, значения индекса САС40 с 20 марта 1995 г. по 29 декабря 2006 г. с 15-минутными интервалами (100 881 наблюдение).

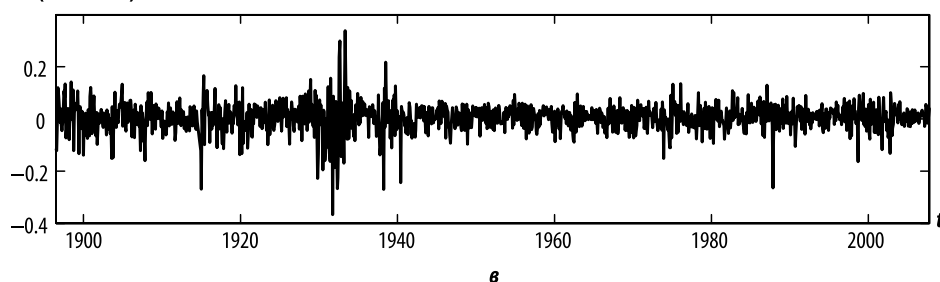
Индекс DJ (приведен. знач.)



Доходность (дневная)



Доходность (месячная)



Доходность (квартальная)

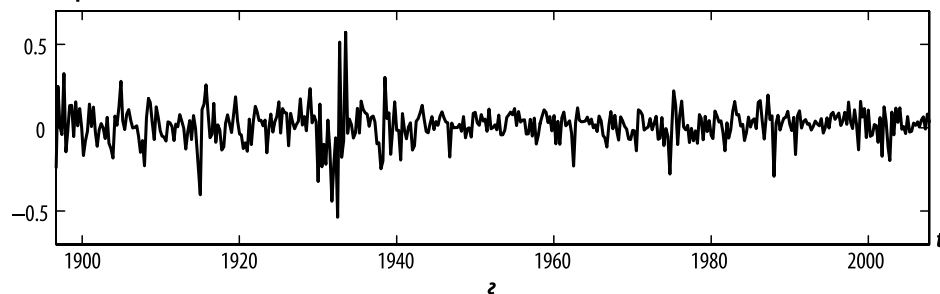
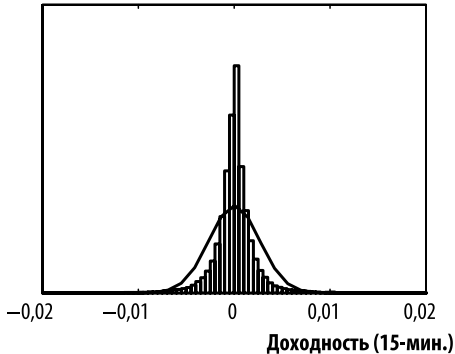


Рис. 2. Доходность на промышленный индекс Доу—Джонса:

а — график значений индекса (для наглядности значения индекса приведены к базе 100 на начало периода и затем на 1 января 1979 г.); **б** — график дневных доходностей (28 863 наблюдения); **в** — график месячных доходностей (2953 наблюдения); **г** — график квартальных доходностей (444 наблюдения)

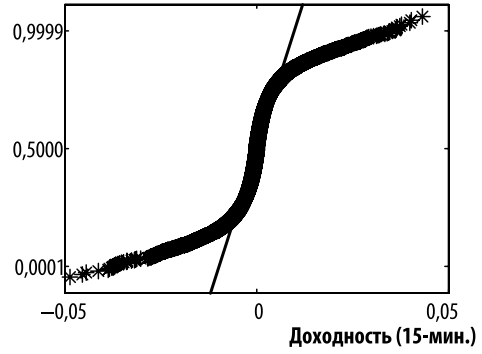
Примечание. Dow Jones Indexes, дневные значения промышленного индекса Доу—Джонса с 26 мая 1896 г. по 10 октября 2007 г. (28 864 наблюдения).

Плотность распределения



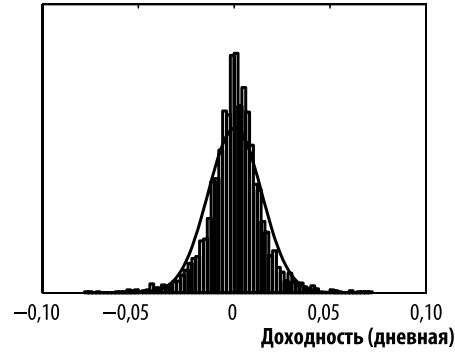
a1

Функция распределения



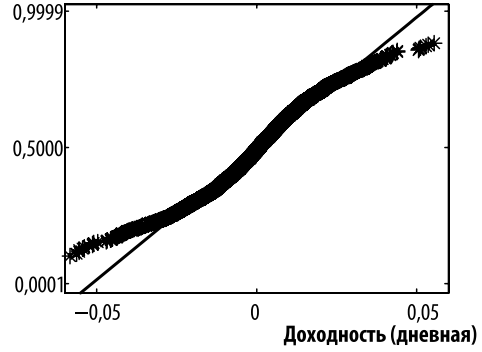
a2

Плотность распределения



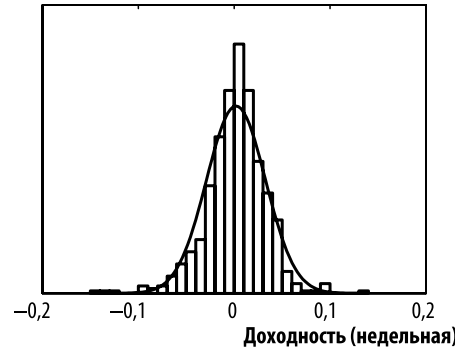
b1

Функция распределения



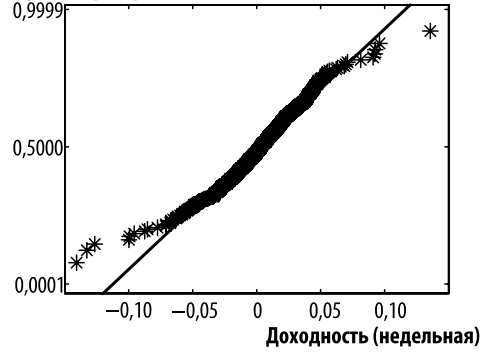
b2

Плотность распределения



c1

Функция распределения



c2

Рис. 3. Вероятностное распределение доходностей на индекс CAC40:

a1 — гистограмма плотности распределения и ее приближение нормальной кривой для 15-минутных доходностей (100 880 наблюдений); a2 — вероятностный график для тех же данных, т. е. функция наблюдаемого кумулятивного распределения в сравнении с функцией теоретического кумулятивного распределения для каждого наблюдения (если теоретическое распределение хорошо приближает наблюдаемое распределение, то все точки графика должны попасть на диагональную линию); b1, 2 — то же для дневных доходностей (2953 наблюдения); c1, 2 — то же для недельных доходностей (590 наблюдений)

Примечание. Euronext, значения индекса CAC40 с 20 марта 1995 г. по 29 декабря 2006 г. с 15-минутными интервалами (100 881 наблюдение).

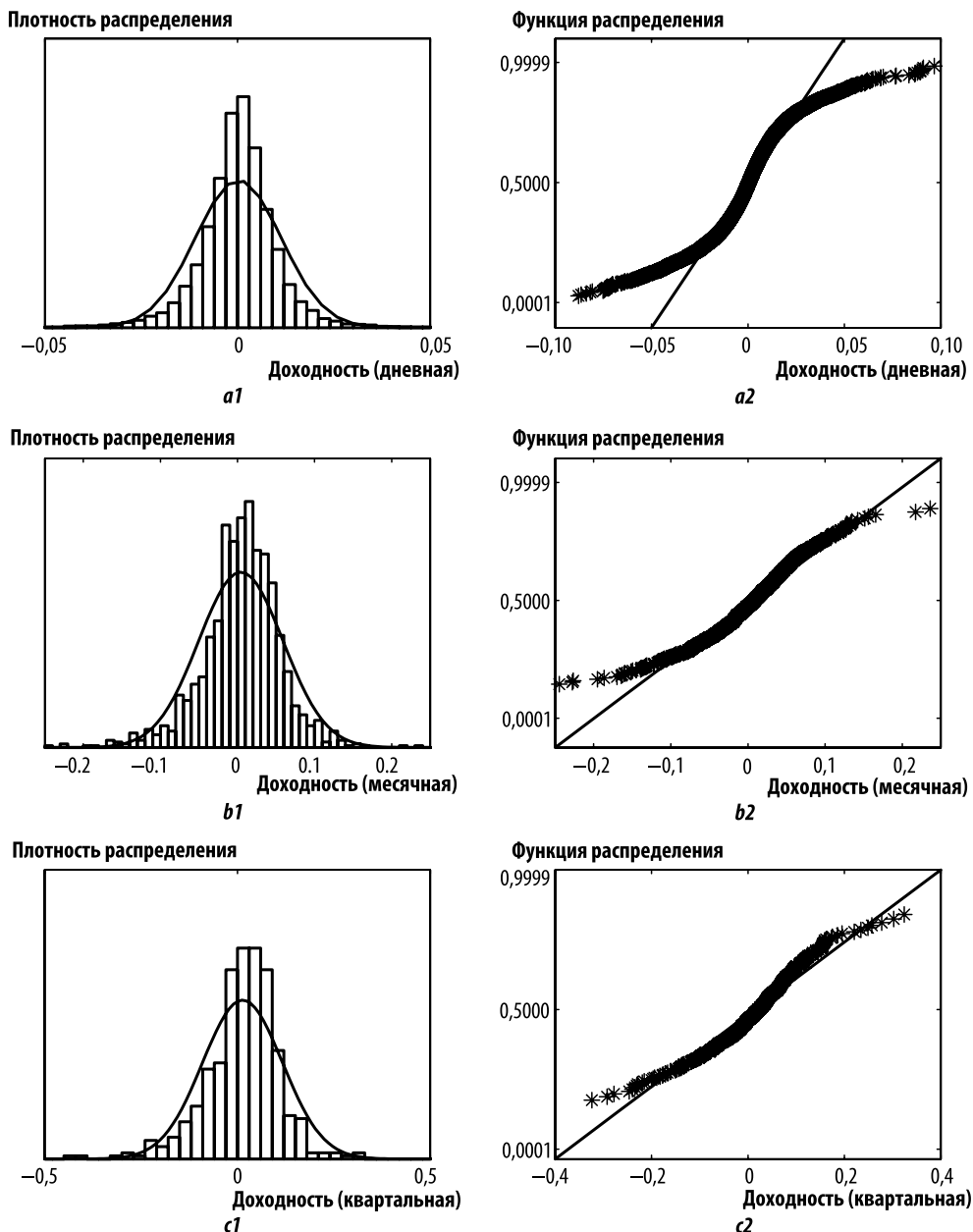


Рис. 4. Вероятностное распределение доходностей на промышленный индекс Доу—Джонса:

a1 — гистограмма плотности распределения и ее приближение нормальной кривой для дневных доходностей (28 863 наблюдения); **a2** — вероятностный график для тех же данных, т. е. функция наблюдаемого кумулятивного распределения в сравнении с функцией теоретического кумулятивного распределения для каждого наблюдения (если теоретическое распределение хорошо приближает наблюдаемое распределение, то все точки графика должны попасть на диагональную линию); **b1, 2** — то же для месячных доходностей (2953 наблюдения); **c1, 2** — то же для квартальных доходностей (444 наблюдения)

Примечание. Dow Jones Indexes, дневные значения промышленного индекса Доу—Джонса с 26 мая 1896 г. по 10 октября 2007 г. (28 864 наблюдения).

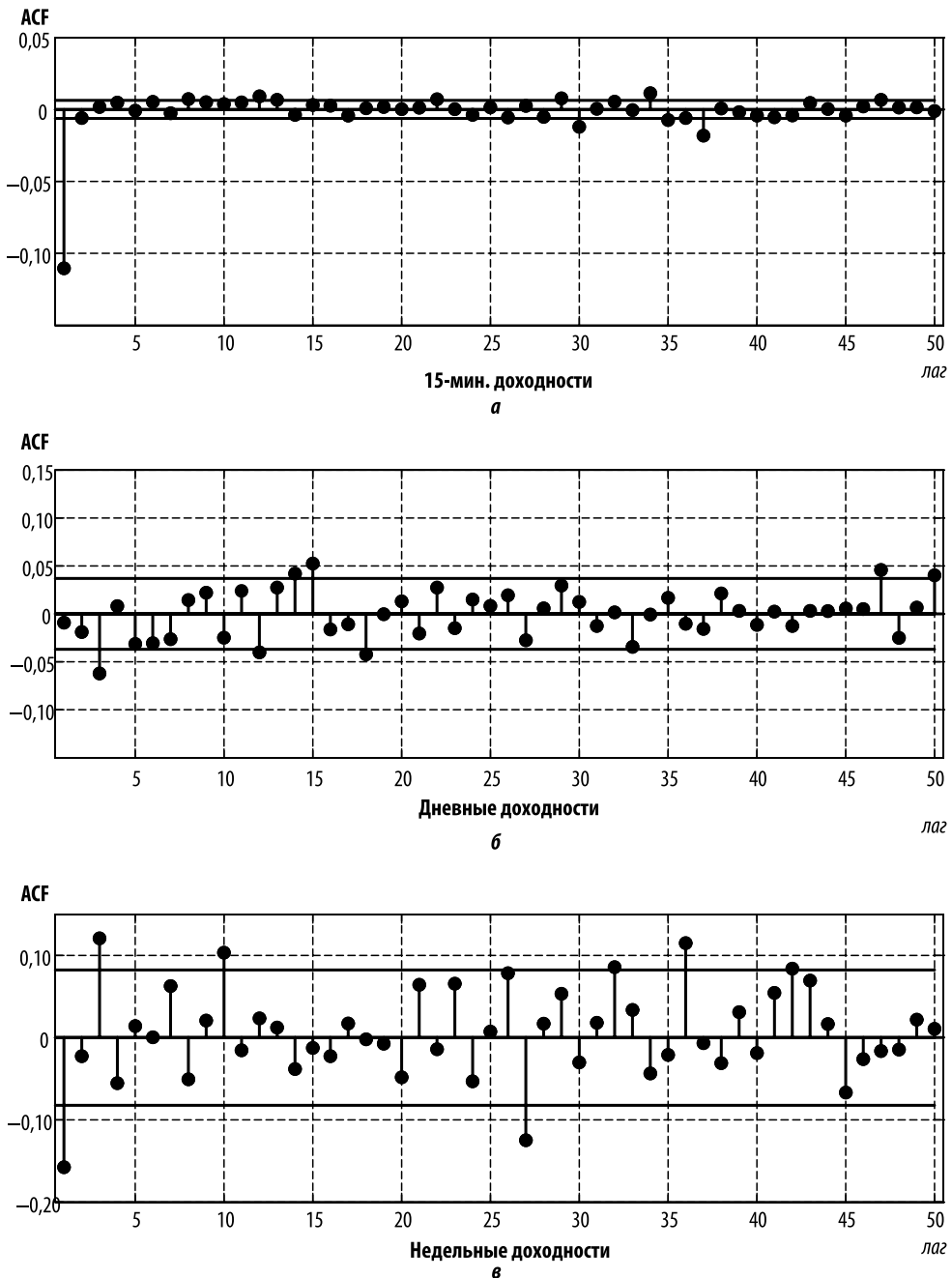


Рис. 5. Выборочная автокорреляционная функция доходностей на индекс CAC40:

а — автокорреляционная функция для 15-минутных доходностей (100 880 наблюдений); **б** — то же для дневных доходностей (2953 наблюдения); **в** — то же для недельных доходностей (590 наблюдений); сплошными линиями показаны доверительные интервалы для автокорреляций в предположении о том, что данные являются гауссовским белым шумом

Примечание. Euronext, значения индекса CAC40 с 20 марта 1995 г. по 29 декабря 2006 г. с 15-минутными интервалами (100 881 наблюдение).

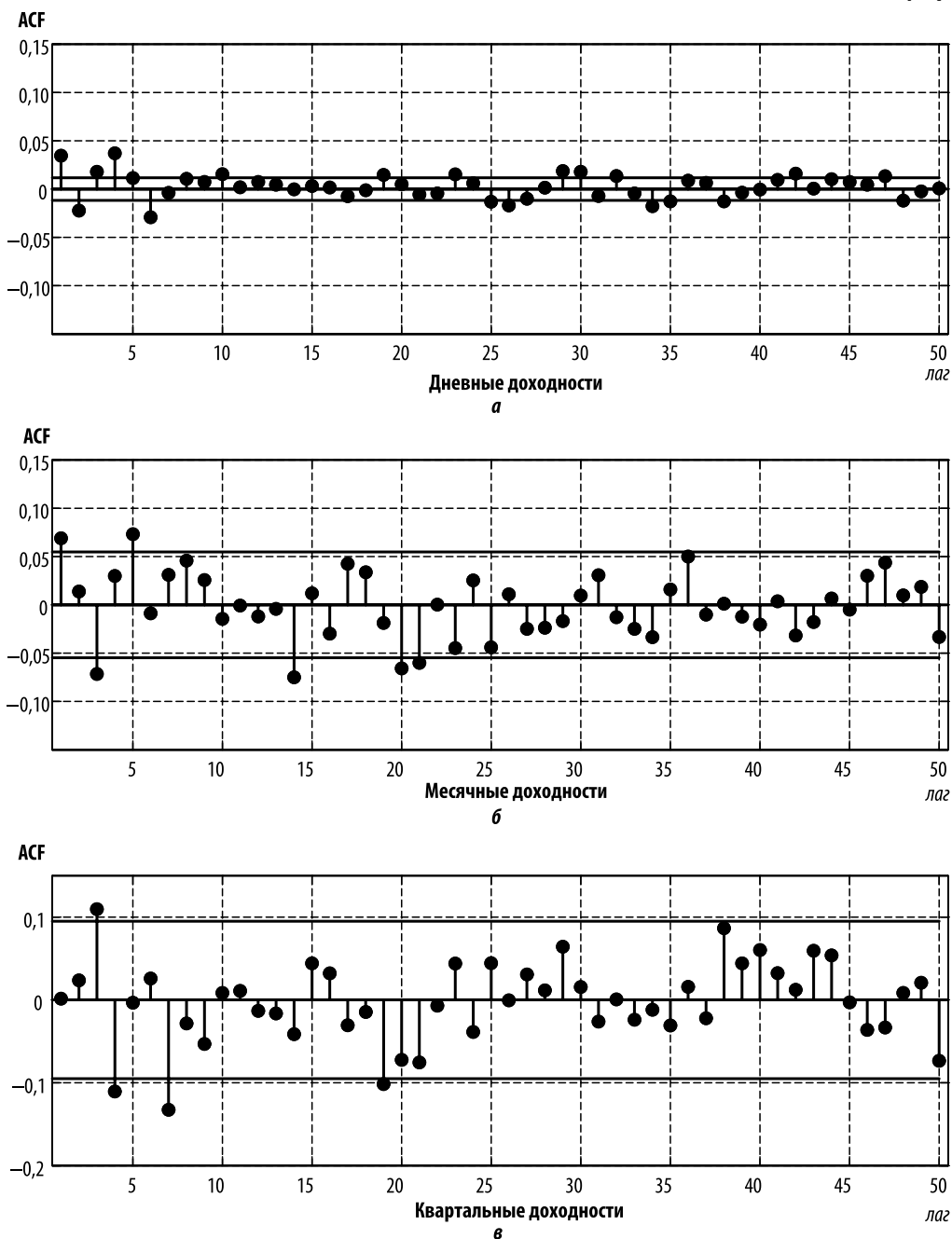


Рис. 6. Выборочная автокорреляционная функция доходностей на промышленный индекс Доу—Джонса:

а — автокорреляционная функция для дневных доходностей (28 863 наблюдения); **б** — то же для месячных доходностей (2953 наблюдения); **в** — то же для квартальных доходностей (444 наблюдения); сплошными линиями показаны доверительные интервалы для автокорреляций в предположении о том, что данные являются гауссовским белым шумом

Примечание. Dow Jones Indexes, дневные значения промышленного индекса Доу—Джонса с 26 мая 1896 г. по 10 октября 2007 г. (28 864 наблюдения).

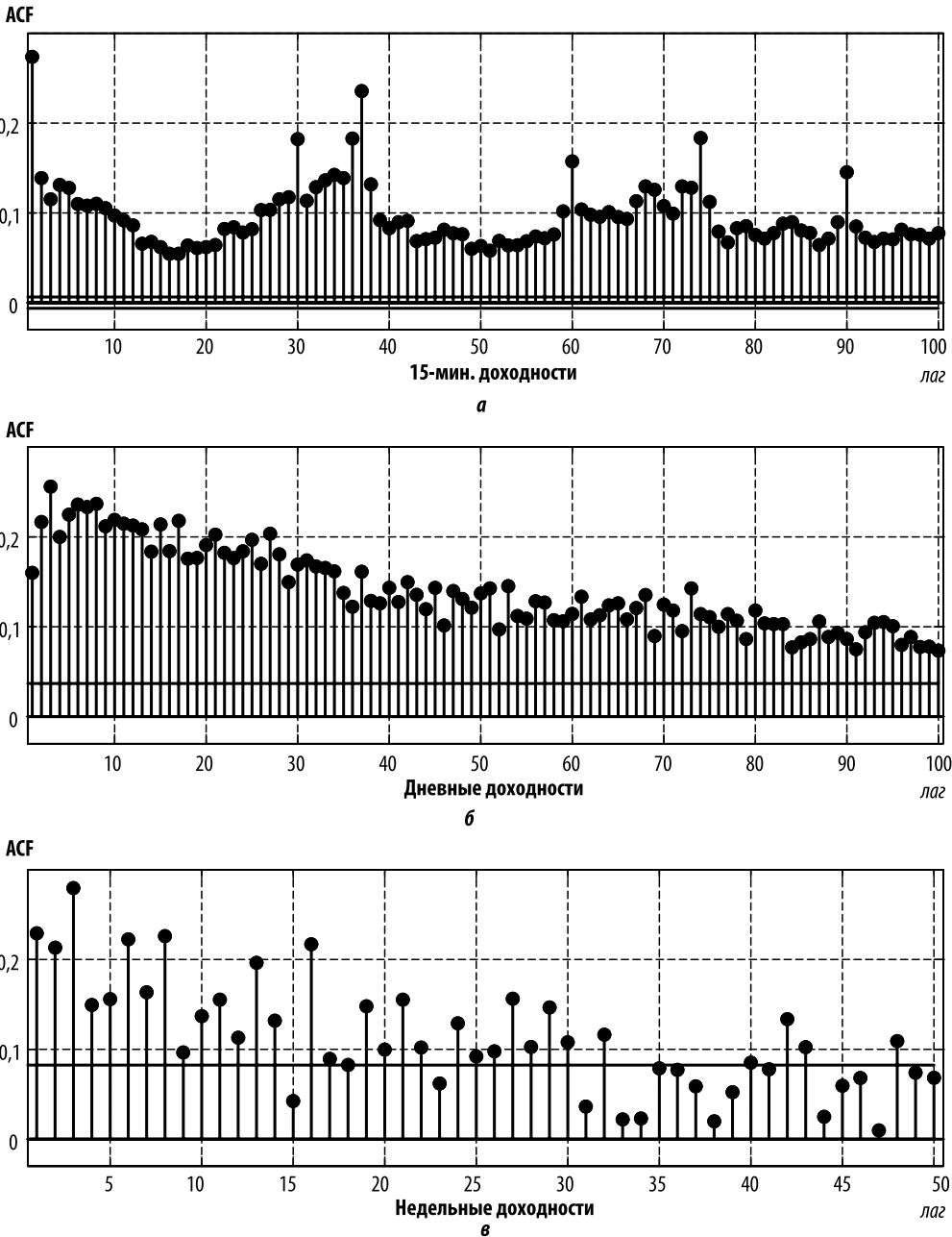


Рис. 7. Выборочная автокорреляционная функция амплитуд доходностей на индекс CAC40:

а — автокорреляционная функция для 15-минутных доходностей (значения доходности взяты по модулю); **б** — то же для дневных доходностей (значения доходности взяты по модулю); **в** — то же для недельных доходностей (значения доходности взяты по модулю); сплошными линиями показаны доверительные интервалы для автокорреляций в предположении о том, что данные являются гауссовским белым шумом

Примечание. Euronext, значения индекса CAC40 с 20 марта 1995 г. по 29 декабря 2006 г. с 15-минутными интервалами (100 881 наблюдение).

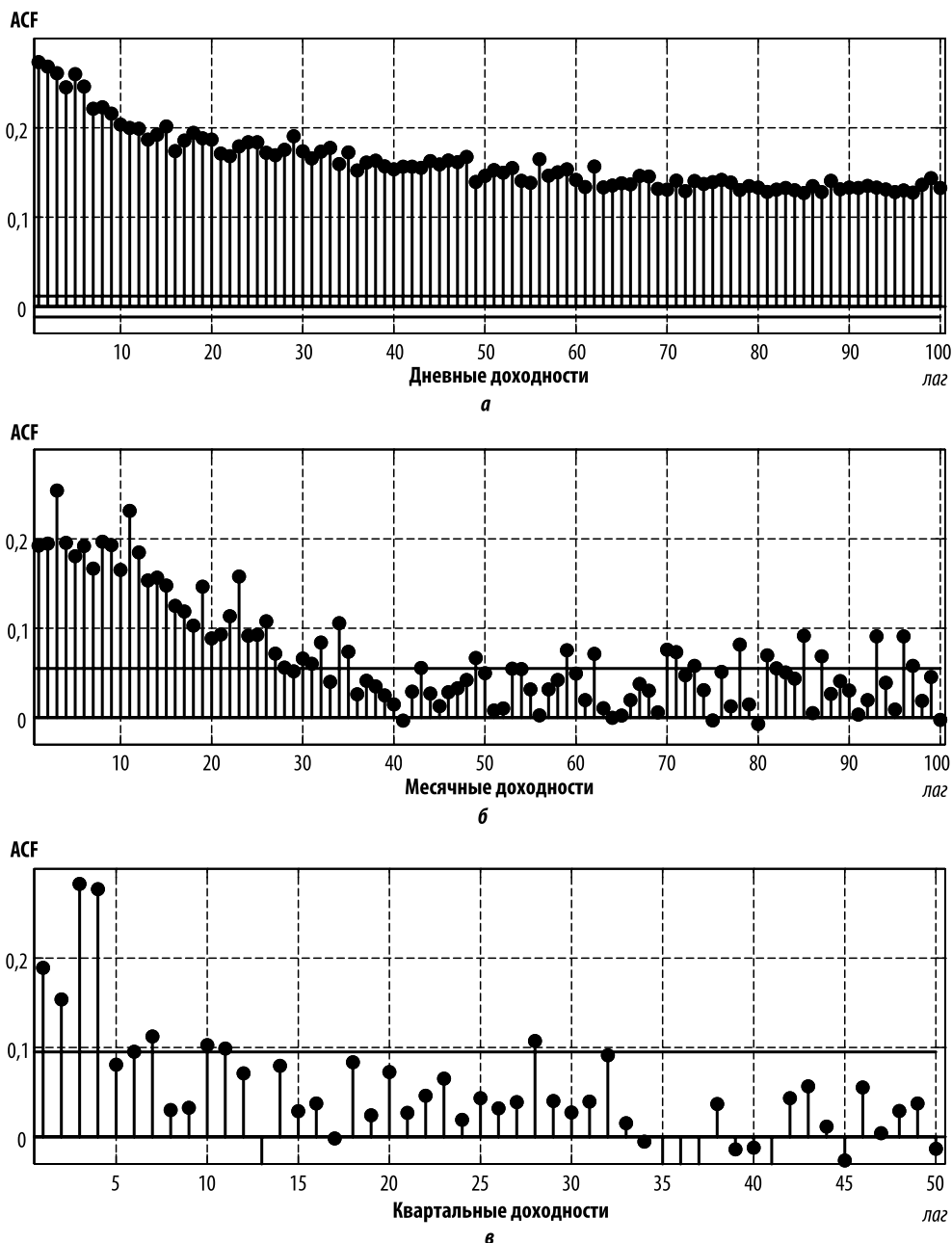


Рис. 8. Выборочная автокорреляционная функция амплитуд доходностей на промышленный индекс Доу—Джонса: **а** — автокорреляционная функция для дневных доходностей (значения доходности взяты по модулю); **б** — то же для месячных доходностей (значения доходности взяты по модулю); **в** — то же для квартальных доходностей (значения доходности взяты по модулю); сплошными линиями показаны доверительные интервалы для автокорреляций в предположении о том, что данные являются гауссовским белым шумом

Примечание. Dow Jones Indexes, дневные значения промышленного индекса Доу—Джонса с 26 мая 1896 г. по 10 октября 2007 г. (28 864 наблюдения).

Анализ структуры зависимостей между доходностями во времени подтверждает выводы, полученные при наблюдении профилей временных рядов. Во-первых, отметим слабые линейные корреляции между доходностями на всех исследуемых частотах (см. рис. 5 и 6). Отметим лишь значимую негативную корреляцию (доверительные интервалы для автокорреляций рассчитаны в предположении о том, что данные являются гауссовским белым шумом) между последовательными 15-минутными доходностями, которые связаны с эффектами микроструктуры [Zhou (1996)], не входящими в предмет рассмотрения данной статьи. Для индекса S&P40 на недельном горизонте заметны небольшая негативная корреляция с лагом 1, которая, возможно, связана с эффектом *contrarian*⁵, и положительная корреляция с лагом 3, являющаяся, скорее всего, статистическим артефактом. Для индекса Доу—Джонса значимых автокорреляций доходностей не обнаружено.

Совершенно иначе выглядит ACF, оцененная для абсолютных значений доходностей (см. рис. 7 и 8). Для абсолютных доходностей (волатильностей) индекса S&P40 положительные автокорреляции остаются устойчиво значимыми для очень больших лагов и для всех рассматриваемых частот (15-минутных, дневных и даже недельных). Так, с лагом 100 дней корреляции дневных волатильностей все еще значимы, а на недельных данных автокорреляции оказываются пренебрежимо малыми лишь для лагов более 30 недель (т. е. более полугода). На 15-минутных волатильностях хорошо прослеживается внутридневная сезонность (за 1 день доступно около 30 наблюдений доходностей). Скорость убывания автокорреляционной функции явно нельзя охарактеризовать как экспоненциальную (такую скорость предсказывают модели типа авторегрессии — скользящей средней (autoregressive moving average, ARMA). Данный феномен называют долгой памятью в волатильности. Более точное определение и обзор соответствующих моделей приводятся в следующем разделе.

Для дневных волатильностей индекса Доу—Джонса характерен еще более высокий уровень автокорреляций — для лага 100 дней они все еще значимы и превышают 10%. Автокорреляции недельных доходностей перестают быть значимыми для лагов свыше 35 недель, квартальных — 4 квартала. Таким образом, дальние корреляции можно наблюдать как на высокочастотных внутридневных данных, так и на дневных наблюдениях волатильности.

Полученные эмпирические результаты демонстрируют наличие длинной памяти во временных рядах волатильности и негауссовский характер распределения доходностей, особенно на высоких частотах наблюдений. В следующем разделе рассмотрим, каким образом существующие в финансовой литературе модели позволяют воспроизводить эти свойства.

3. Модели условной гетероскедастичности

При построении моделей ценовой динамики их авторы стремились корректно воспроизвести эмпирические свойства наблюдаемых финансовых временных рядов, прежде всего феномена кластеризации волатильности. Обзор уместно начать с модели условной гетероскедастичности (autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH), предложенной Энгелем в 1982 г. для моделирования инфляции в Великобритании [Engle (1982)]. Эта модель позднее

⁵ Contrarian в переводе с английского означает «ведущий себя иначе, чем другие». Стратегия *contrarian* состоит в том, чтобы продавать акции, по которым наблюдалась высокая доходность, и покупать акции, по которым наблюдалась низкая доходность, ожидая смену тенденции. Соответствующая тематика выходит за рамки настоящей работы.

была использована и для моделирования цен акций и обменных курсов [Engle and Bollerslev (1986)]. Доходности в модели ARCH представимы в виде:

$$r_t = E(r_t | I_{t-1}) + \sigma_t \varepsilon_t, \quad (6)$$

где $\varepsilon_t \sim iid N(0, 1)$ ⁶ — условие нормальности, вообще говоря, необязательно;
 I_t — доступное информационное множество до момента времени t включительно, определяемое как естественная фильтрация процесса.

Условная дисперсия (или волатильность) σ_t^2 подчиняется уравнению:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q}^2, \quad (7)$$

где $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ для $\forall i > 0, \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$;
 q — параметр, определяющий глубину памяти в вариации доходностей.

Естественным продолжением ARCH является обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, GARCH), предложенная Боллерселем в 1986 г. и до сегодняшнего дня активно используемая для прогнозов волатильности [Bollerslev (1986, 1987)]; [Bollerslev, Chou, et al. (1992)]; [Hansen and Lunde (2005)]. Согласно этой модели условные вариации задаются следующим процессом с параметрами p и q , которые на практике чаще всего берутся равными единице:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L, q) \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 + \beta(L, p) \sigma_t^2, \quad (8)$$

где обычно все коэффициенты α_i и β_i полагаются неотрицательными;
 L^n — оператор лага порядка n ;
 $a(L, n)$ — оператор вида $\sum_{i=1}^n a_i L^i$, применяемый к временному ряду.

Таким образом, запись $a(L, q)X_t$ является сокращением для $\sum_{i=1}^q a_i X_{t-i}$.

Используя эти обозначения, уравнение (8) для модели GARCH(p, q) можно записать:

$$[1 - \alpha(L, q) - \beta(L, p)]r_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L, p)](r_t^2 - \sigma_t^2), \quad (9)$$

что соответствует записи процесса ARMA для квадратов доходности с параметрами $\max p, q$ и p .

Для обеспечения стабильности процесса (т.е. конечной вариации ошибок $\sigma_t \varepsilon_t$) необходимо потребовать его слабой стационарности, т.е. чтобы все корни уравнений $\alpha(L_q) = 0$ и $1 - \alpha(L_q) - \beta(L_p) = 0$ лежали вне единичного круга.

Для GARCH(1, 1) это дает ограничение вида $\alpha + \beta < 1$. Необходимые и достаточные условия строгой стационарности, эргодичности и существования моментов для семейства GARCH-моделей исследованы в [Ling and M. McAleer (2002a)]; [Ling and McAleer (2002b)].

Модели типа GARCH позволяют воспроизвести феномен кластеризации волатильности (поэтому его также называют GARCH-эффектом). При этом теоретическая ACF процесса

⁶ Символ *iid* используется в англоязычной специальной литературе для обозначения независимости и одинаковой распределенности соответствующих случайных величин (в данном случае — случайных величин ε_t). — Прим. науч. ред.

GARCH(1, 1) убывает с геометрической скоростью, которая определяется суммой $\alpha + \beta$. На практике оценки параметров модели часто оказываются такими, что $\alpha + \beta$ близко к единице [Bollerslev, Chou, et al. (1992)]. Поэтому выборочная ACF для GARCH(1,1) оказывается трудно отличимой от задаваемой уравнением (2).

Параметры моделей ARCH/GARCH чаще всего оцениваются методом максимального правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия принимает вид:

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(2 \ln \sigma_t + \frac{\varepsilon_t^2}{(2\sigma_t^2)} \right) \quad (10)$$

При нарушении предпосылки о нормальности остатков ε_t в модели (6), но при правильной спецификации модели $E(r_t | I_{t-1})$ возможна оценка методом квазimaxимального правдоподобия. Оценки, получаемые этим методом, являются состоятельными при конечной вариации остатков (т. е. при $\alpha + \beta < 1$) и асимптотически нормальными при существовании конечного четвертого момента r_t [Ling and McAleer (2003)]⁷.

Одно из основных направлений критики модели GARCH(1, 1) состоит в том, что память модели является «недостаточно долгой», поскольку теоретическая ACF характеризуется экспоненциальным убыванием. Когда $\alpha + \beta$ значимо не отличаются от единицы, модель GARCH(1, 1) вырождается в нестационарный процесс, названный в [Engle and Bollerslev (1986)] *интегрированной обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичностью* (IGARCH — integrated GARCH). Последняя модель, однако, подразумевает необходимость решения задачи выбора значений структурных параметров p и q . Альтернативный подход состоит в использовании стохастических процессов, теоретические свойства которых предполагают наличие долгой памяти. Примером такого процесса может служить дробное броуновское движение, предложенное Мандельбротом и Ван Нессом [Mandelbrot and Van Ness (1968)]. Это непрерывный гауссовский процесс с нулевым дрейфом, имеющий автокорреляционную функцию формы:

$$C(\tau) = E(W_t^H W_{t-\tau}^H) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |t-\tau|^{2H} - |\tau|^{2H}), \quad (11)$$

где W_t^H — значение дробного броуновского движения с параметром $H \in (0, 1)$ в момент времени $t \in [0, T]$, $t \in \mathbb{R}$, при этом $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Спектральная плотность процесса имеет вид:

$$\Psi(x) = 4\sigma^2 c_H \sin^2(\pi x) \sum_{i=-\infty}^{\infty} (|x+i|)^{-2H-1}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (12)$$

где σ^2 — вариация процесса;
 $c_H > 0$ — некоторая константа.

Легко увидеть, что при $H = \frac{1}{2}$ процесс вырождается в обыкновенное броуновское движение, а при $H > \frac{1}{2}$ имеет стационарную динамику, характеризующуюся длинной памятью.

⁷ За рамками статьи остаются модели, в которых используются распределения остатков, отличные от нормального. — Прим. науч. ред.

Дробно-интегрированный процесс, предложенный в [Granger and Joyeux (1980)]; [Hosking (1981)], представляет собой дискретный аналог дробного броуновского движения. Он определяется уравнением:

$$(I-L)^d X_t = \varepsilon_t, \quad (13)$$

где $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon^2)$, а оператор $(I-L)^d$, $0 < d < 1$, представляет собой бесконечный полином вида:

$$(I-L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} L^i, \quad (14)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Спектральная плотность процесса записывается:

$$\Psi(x) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(4\sin^2(\pi x))^d} c_H \sin^2(\pi x) \sum_{i=-\infty}^{\infty} (|x+i|)^{-2H-1}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Для $|d| < \frac{1}{2}$ процесс имеет стационарную динамику с гиперболическим убыванием автокорреляционной функции, что соответствует длинной памяти.

Дробное броуновское движение предлагалось в качестве модели цен акций в [Mandelbrot (1971)] и позднее во многих исследованиях, эмпирически оценивающих параметр H в уравнении (11) [Mandelbrot and Taqqu (1979)]. Однако в таком случае приходится признать наличие дальних корреляций в самих доходностях, а не только в их абсолютных значениях. Как показал Хейде [Heyde (2002)], чтобы в модели дробного броуновского движения наблюдалась долгая память в амплитудах, необходимо выполнение условия $\frac{3}{4} \leq H \leq 1$, которое явно не подтверждается эмпирическими данными.

С учетом вышесказанного более реалистичными представляются модели, предполагающие дальние корреляции в амплитудах доходностей и отсутствие последних в самих доходностях. Такой моделью является FIGARCH (дробно-интегрированная GARCH — fractionally integrated GARCH), предложенная в [Baillie, Bollerslev, et al. (1996)]; [Bollerslev and Mikkelsen (1996)]. Процесс для вариации доходностей записывается:

$$[1 - \beta(L, p)] \sigma_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L, p) - \varphi(L)(1-L)^d] r_t^2, \quad (16)$$

где $\varphi(L) = [1 - \alpha(L, q) - \beta(L, p)](1-L)^{-1}$.

При $d \rightarrow 1$ эта модель вырождается в IGARCH, о которой шла речь ранее.

Известно множество других модификаций моделей условной гетероскедастичности, направленных в первую очередь на улучшение их прогнозной силы. Например, GARCH с эффектом ожидаемой доходности предполагает, что ожидаемая доходность увеличивается с ростом волатильности (GARCH-M — GARCH-in-mean) [Engle, Lilien, et al. (1987)]. Также были разработаны модели, учитывающие эффекты асимметрии и леввериджа. Среди них назовем

модель Глостена—Джаганатана—Панкеля (GJR — Glosten—Jagannathan—Runkle), привлекающую во внимание асимметрию, но не левверидж [Glosten, Jagannathan, et al. (1992)], экспоненциальную GARCH (EGARCH — exponential GARCH) с эффектом леввериджа, снимающую, кроме прочего, ряд неудобных ограничений на оцениваемые параметры [Nelson (1991)], и квадратическую GARCH (GQARCH — generalized quadratic ARCH) [Sentana (1995)]. Получили развитие нелинейные GARCH-модели (NGARCH — non-linear GARCH), обобщающие форму зависимости текущей вариации от прошлых значений, в том числе модели с переключениями режимов низкой и высокой волатильности [Higgins and Bera (1992)]; [Lanne and Saikkonen (2005)]. В исследовании [Hansen and Lunde (2005)], посвященном сравнению прогнозной силы ARCH-моделей, авторы рассматривают 330 различных спецификаций для условной гетероскедастичности. Более подробное описание некоторых из них можно найти в [Morimune (2007)]. Также получили развитие исследования, связанные с оценкой производных финансовых инструментов в случае, когда цена базового актива имеет GARCH-динамику [Duan (1995)]; [Ritchken and Trevor (1999)]; [Barone-Adesi, Engle, et al. (2008)].

Мы привели спецификации моделей условной гетероскедастичности в дискретном времени. Процесс, соответствующий GARCH в непрерывном времени, рассматривается в [Drost and Werker (1996)]. Устанавливается связь между процессом условной гетероскедастичности и стохастической волатильностью, которая будет рассмотрена ниже. Интересно, что оценки параметров модели в дискретном времени (оцененном на данных любой частоты) позволяют специфицировать процесс в непрерывном времени, что связано со свойством агрегирования моделей GARCH во времени [Drost and Nijman (1993)], к которому мы вернемся в разделе 5.

Особую практическую важность имеет включение скачкообразной составляющей в модели динамики цен, что позволяет учесть «тяжелые» хвосты в распределении доходностей [Bates (1996)]; [Eraker, Johannes, et al. (2003)]. Еще в 1960-е годы, Мандельброт [Mandelbrot (1963)] предлагал использовать для этих целей скачкообразные процессы Леви (степенные процессы), имеющие бесконечную вариацию. Свойства процессов с долгой памятью, в которых инновации вызваны процессом Леви, изучаются в [Anh, Heyde, et al. (2002)]. В [Chan and Maheu (2002)] интенсивность скачков моделируется в дискретном времени с помощью процесса типа ARMA одновременно со спецификацией GARCH для волатильности. В непрерывном времени модели типа GARCH со скачкообразными инновациями описаны в [Drost and Werker (1996)]; [Kluppelberg, Lindner, et al. (2004)].

Для управления инвестиционным портфелем представляют интерес многомерные модели условной гетероскедастичности, учитывающие корреляции между активами. Первая такая модель, называемая моделью постоянных условных корреляций (constant conditional correlation, CCC), предложена Боллерселем [Bollerslev (1990)]. В ней доходность каждого актива следует одномерному процессу GARCH, а условные корреляции между доходностями полагаются постоянными. При этом условная ковариация определяется как произведение постоянной корреляции на соответствующие (независимые) условные стандартные отклонения. Основным достоинством CCC является простота оценки параметров и интерпретации, а среди недостатков отметим отсутствие связи между условными волатильностями разных активов, отсутствие асимметричных эффектов и статичность корреляций. Более общая многомерная модель с постоянными корреляциями изучается в [Ling and McAleer (2003)].

Энгель [Engle (2002)] обобщил CCC, введя динамику тип GARCH для корреляций (модель динамических условных корреляций, DCC — dynamic conditional correlations). Динамика корреляций в DCC предполагается одинаковой для всех активов. Последнее ограничение ослаблено в [Billio, Caporin, et al. (2006)].

4. Модели стохастической волатильности

В моделях условной гетероскедастичности, рассмотренных выше, имеется всего один источник случайности, при этом вариация процесса предполагается зависимой в той или иной форме от прошлых его реализаций. Альтернативный способ моделирования состоит в том, чтобы задать динамику цен простой моделью, например дифференциальным уравнением (1), но волатильность σ в нем считать не параметром, а отдельным стохастическим процессом. Таким образом, появляется два независимых источника случайности. Эта идея лежит в основе моделей стохастической волатильности.

Первая модель стохастической волатильности предложена Тейлором [Taylor (1982)]. В ней предполагалось, что логарифмическая волатильность представляет собой процесс AR(1):

$$\begin{aligned} r_t &= \mu \sigma_t \varepsilon_t, \\ \ln \sigma_t^2 &= \varphi \ln \sigma_{t-1}^2 + \nu_t, \end{aligned} \quad (17)$$

где μ — некоторая положительная константа, включение которой в модель позволяет удалить свободный член из уравнения для волатильности;

φ — параметр авторегрессии, определяющий память в волатильности.

Свойства авторегрессионных моделей стохастической волатильности (auto-regressive stochastic volatility, ARSV) были исследованы в [Andersen (1994)]; [Taylor (1994)]; [Capobianco (1996)]. В частности, при условии стационарности процесса логарифмической волатильности распределение доходности является островершинным и симметричным [Bai, Russel, et al. (2003)]. Доходности линейно не коррелированы во времени, но не являются независимыми. Автокорреляционная функция для амплитуд доходностей и квадратов доходностей имеет характерную для процессов ARMA форму.

Широкое развитие модели стохастической волатильности получили в литературе, посвященной оценке производных финансовых инструментов. В качестве базовой модели для доходности принимается (1), где σ_t записывается как функция некоторого процесса диффузии $\sigma_t = f(X_t)$. В наиболее популярных на практике моделях X_t представляет собой процесс Ито формы:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S} &= \mu dt + \sigma dW(t), \\ \sigma_t &= f(X_t), \\ dX_t &= \theta(\psi - X_t)dt + g(X_t)dB_t, \\ \langle W, B \rangle_t &= \rho t, \end{aligned} \quad (18)$$

где θ и ψ — константы;

$f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — некоторые функции;

ρ — параметр корреляции между двумя винеровскими процессами, которые служат источниками инноваций.

В [Hull and White (1987)] используется спецификация $f(X_t) = X_t$, $\theta < 0$, $\mu = 0$, $g(X_t) = \nu X_t$, которая соответствует геометрическому броуновскому движению для волатильности. В этой модели можно получить простые явные формулы для стоимости опционов, однако ее свойства далеки от реальности (вариация доходности не ограничена, поскольку процесс волатильности нестационарен).

Была также предложена [Scott (1987)]; [Stein and Stein (1991)] модель с использованием процесса Орнштейна—Уленбека (Ornstein—Uhlenbeck, OU) для волатильности $f(X_t) = X_t$, $g(X_t) = \nu$, который характеризуется сходимостью волатильности к долгосрочному ее уровню ψ со скоростью θ и «волатильностью волатильности» ν . Аналогом описанного выше ARSV(1) в непрерывном времени является экспоненциальная модель OU [Stein and Stein (1991)], где $f(X_t) = \exp X_t$ и $g(X_t) = \nu$. Кроме того, широкое распространение получила модель Хестона [Heston (1993)] $f(X_t) = \sqrt{X_t}$, $g(X_t) = \nu \sqrt{X_t}$. Процесс, используемый для моделирования волатильности в данном случае, известен как процесс Кокса—Ингерсолла—Росса [Cox, Ingersoll, et al. (1985)].

Логика развития моделирования стохастической волатильности во многом повторяет историю совершенствования моделей GARCH. В [Harvey and Shephard (1996)] и позднее в [Jacquier, Polson, et al. (2004)] авторы включают в модель ARSV эффект леввериджа, что позволяет двум инновациям в (17) быть негативно коррелированными (в непрерывном времени для модели типа (18) это соответствует выбору $\rho < 0$). Модель стохастической волатильности с эффектом ожидаемой доходности, аналогичная GARCH-M, предложена в [Koopman and Uspensky (2002)]. Скачкообразная составляющая добавляется в модель стохастической волатильности с помощью негауссовских процессов (вместо броуновского движения в качестве генератора инноваций используется скачкообразный процесс Леви), как предлагается в [Barndorff-Nielsen and Shephard (2001)]; [Eraker, Johannes, et al. (2003)]; [Chernov, Gallant, et al. (2003)]; [Duffie, Filipovic, et al. (2003)].

Предложены различные способы учета долгой памяти: в [Breidt, Crato, et al. (1998)]; [Harvey (1998)] это дискретные модели с дробным интегрированием, в [Comte and Renault (1998)] — модель в непрерывном времени, основанная на дробном броуновском движении. В [Chernov, Gallant, et al. (2003)] рассматриваются модели, в которых стохастическая волатильность имеет несколько различных независимых факторов (компонент). Такого типа модели позволяют получить динамику цен с долгой памятью волатильности, наблюдаемой в выборочной ACF, даже когда процессы, генерирующие данные, таким свойством не обладают [LeBaron (2001a)]. В [Barndorff-Nielsen and Shephard (2001)] долгая память моделируется путем суперпозиции бесконечного числа неотрицательных и негауссовских процессов OU, что позволяет учитывать долгую память одновременно со скачками. Кроме того, были предложены модели стохастической волатильности с переключением режимов [So, Lam, et al. (1998)]; [Liu (2000)]; [Hwang, Satchell, et al. (2007)], которые также позволяют воспроизвести эмпирический феномен дальних корреляций. Разработаны многомерные SV-модели, сравнительные обзоры которых можно найти в [Liesenfeld and Richard (2003)]; [Asai, McAleer, et al. (2006)]; [Chib, Nardari, et al. (2006)]. Для некоторых случаев (например, модель Хестона) проблема оптимального динамического управления портфелем [Liu (2007)]. Наконец, как

и в литературе, относящейся к GARCH, предложены методы оценки производных финансовых инструментов [Heston (1993)]; [Hull and White (1987)]; [Henderson (2005)]; [Maghsoodi (2005)].

Следует обратить внимание на то, что волатильность, определяемая в моделях типа (17) и (18), не является наблюдаемой величиной (с оговоркой, о которой будет сказано ниже), поэтому для оценки моделей SV используются наблюдения доходности или их трансформации. Методы оценки могут быть основаны либо непосредственно на статистических свойствах доходностей (эффективный метод моментов, метод квазикасимального правдоподобия и методы, основанные на вспомогательных моделях), либо на линейной модели для логарифмов квадратов доходностей. Подробный обзор этих методов можно найти в [Broto and Ruiz (2004)].

Интерес к моделям SV особенно возрос в последние годы во многом потому, что из ненаблюдаемой величины волатильность превратилась в «почти наблюдаемую». Связано это с доступностью внутридневных котировок акций, которые позволяют непараметрическую оценку волатильности. Широкое распространение получила концепция реализованной волатильности (realized volatility, RV), которая представляет собой квадратный корень суммы квадратов внутридневных доходностей [Andersen, Bollerslev, et al. (2001)]; [Barndorff-Nielsen and Shephard (2002b)]; [Andersen, Bollerslev, et al. (2003)]:

$$\hat{\sigma}_t^{RV} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{M-1} r_{t,\delta}^2}{M-1} \right)^{1/2} \quad (19)$$

где $\hat{\sigma}_t^{RV}$ — реализованная волатильность доходности;

$r_{i,\delta}$ — логарифмическая доходность на интервале времени $[i, i + \delta]$ с $\delta = \tau(M-1)^{-1}$;

τ — длина периода, за который рассчитывается волатильность (например, 1 день);

M — число наблюдений цены, доступных за этот интервал.

Если в формуле (19) опустить квадратный корень и нормализацию на количество наблюдений цены, получим оценку реализованной вариации за период τ , также часто используемую на практике [Barndorff-Nielsen and Shephard (2002a)], [Hansen (2005)].

Применение реализованной волатильности и вариации затруднено тем, что доходности на высоких частотах оказываются коррелированными из-за эффектов микроструктуры финансового рынка (так называемый «шум микроструктуры» — microstructure noise) [Biais, Glosten, et al. (2005)]. В связи с этим были разработаны методы корректировки реализованной вариации и выбора оптимальной частоты выборки [Bandi and Russel (2008)]. Однако самый простой и чаще всего употребляемый на практике способ борьбы с эффектом микроструктуры: взять доходности за достаточно длинные интервалы времени, чтобы корреляции доходностей перестали быть значимыми, но достаточно короткие для извлечения пользы из высокочастотных наблюдений. Обзор свойств реализованной волатильности и ее применения в контексте моделей стохастической волатильности приведен в [McAleer and Medeiros (2008)].

Альтернативную непараметрическую оценку волатильности можно получить, агрегируя искусственные доходности, соответствующие разнице между максимальным $H_{t,i}$ и минимальным $L_{t,i}$ значениями цены в течение K интервалов времени $[i, i + \Delta]$, на которые разделен интересующий нас период времени τ [Alizadeh, Brandt, et al. (2002)]; [Christensen and Podolskij (2007)]; [Martens and Van Dijk (2007)]:

$$\hat{\sigma}_t^{RR} = \frac{1}{4 \ln 2} \sum_{i=1}^{M-1} (\ln H_{t,i} - \ln L_{t,i}), \quad (20)$$

где $\hat{\sigma}_t^{RR}$ — реализованный разброс.

Ясно, что длина интервала Δ должна быть выбрана таким образом, чтобы он содержал несколько наблюдений цены. Статистические свойства получаемых таким образом оценок в ряде случаев могут быть лучше, чем для реализованной вариации. Еще одним дополнением к реализованной вариации являются оценки с помощью процесса двойной степенной вариации [Barndorff—Nielsen and Shephard (2002c)]; [Woerner (2005)], которые, в частности, позволяют оценивать вклад скачкообразной компоненты в интегрированную вариацию.

Одной из основных задач построения моделей волатильности всегда было ее прогнозирование [Andersen and Bollerslev (1998)]; [Andersen, Bollerslev, et al. (1999)]; [Christoffersen and Diebold (2000)]; [Granger and Poon (2003)]; [Martens and Zein (2004)]; [Hansen and Lunde (2005)]; [Ghysels, Santa-Clara, et al. (2006)]; [Hawkes and Date (2007)]. Развитие непараметрических методов оценки волатильности с использованием внутридневных доходностей позволило, с одной стороны, повысить качество прогнозов, основанных на временных рядах цен, по сравнению с вмененной волатильностью опционов [Martens and Zein (2004)], а с другой — сравнивать различные модели SV, принимая непараметрическую оценку волатильности за фактически наблюдаемую [Brooks and Persaud (2003)]; [Corradi and Distaso (2006)].

5. Агрегирование доходности во времени

В разделе 2 были рассмотрены доходности на индекс S&P40, рассчитанные по наблюдениям индекса с разной частотой. Было показано, что форма вероятностных распределений доходности меняется во времени. В то же время динамические свойства волатильности проявляются на данных, соответствующих разным горизонтам (дальние корреляции в амплитудах доходностей и их отсутствие в самих доходностях). В связи с этим возникает серия практически значимых вопросов. Каким образом феномен долгой памяти связан со свойствами доходностей на разных горизонтах? Пригодны ли модели, оцененные на данных с определенной частотой, воспроизводить свойства доходностей на других горизонтах? Следует ли учитывать одновременно результаты, относящиеся к различным горизонтам, и если да — то каким образом?

Ответ на первый из этих вопросов был в значительной степени дан еще в 1968 г. Мандельбротом и Ван Нессом [Mandelbrot and Ness (1968)]. Для некоторого класса процессов при изучении их свойств на коротких горизонтах можно описать их свойства на длинных горизонтах. Процесс X_t называется самоаффинным, если существует такая константа $H > 0^8$, что для произвольного фактора масштабирования $c > 0$ случайные величины X_{ct} и $c^H X_t$ имеют одинаковое вероятностное распределение:

$$X_{ct} = c^H X_t. \quad (21)$$

⁸ Этот параметр называется экспонентой Херста. Название дано Мандельбротом в честь гидролога Гарольда Херста, изучавшего долгую память в уровнях воды реки Нил.

Дробное броуновское движение, определенное через форму его ACF в (11), является примером самоаффинного процесса. Уточним, что при $\frac{1}{2} < H < 1$ этот процесс характеризуется длинной памятью, а при $H = \frac{1}{2}$ вырождается в стандартный винеровский процесс с независимыми приращениями.

Следует обратить внимание, что из самоаффинности процесса с $H > \frac{1}{2}$ не следует наличие длинной памяти, и наоборот. В качестве контрпримера можно привести устойчивые процессы Леви (L -устойчивые процессы). Интуитивно L -устойчивость вероятностного распределения означает неизменность его формы (инвариантность вплоть до параметра масштабирования) при суммировании независимых случайных величин, подчиненных этому закону. Этот класс включает распределения, удовлетворяющие условию $P(X > x) \sim cx^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 2$. Используя независимые стационарные случайные величины, распределенные таким образом, в качестве приращений случайного процесса, получаем L -устойчивый процесс. Нормальное распределение является частным случаем L -устойчивого распределения, а броуновское движение — соответствующим частным случаем L -устойчивого процесса. Однако случайные величины с «тяжелыми» хвостами (и бесконечной вариацией) также могут использоваться для генерирования самоаффинных процессов, на этот раз с независимыми приращениями. Таким образом, два различных по своей сути феномена (дальние корреляции и экстремально большие колебания) могут быть свойственны самоаффинным процессам.

Обобщением класса самоаффинных процессов является класс мультифрактальных процессов, для которых фактор масштабирования имеет более общую форму:

$$X_{ct} = M(c)X_t, \quad (22)$$

где $M(\cdot)$ — независимая от X положительная случайная функция от c — такая, что $M(xy) = M(x)M(y)$ для $\forall x, y > 0$.

Для строго стационарных (т.е. стационарных в распределении) процессов выполняется локальное правило масштабирования вида:

$$X_{t+c\Delta t} = M(c)(X_{t+\Delta t} - X_t). \quad (23)$$

В мультифрактальном случае можно определить обобщенную экспоненту Херста как $H(c) = \log_c M(c)$ и переписать (22) в виде:

$$X_{ct} = c^{H(c)} X_t. \quad (24)$$

Из (22) можно получить правило масштабирования для моментов X_t :

$$E(|X_t|^q) = c(q)t^{\zeta(q)+1}, \quad (25)$$

где $c(q)$ и $\zeta(q)$ — детерминистические функции.

Функция $\zeta(q)$ имеет особое значение и называется функцией масштабирования. Полагая $q=0$, легко увидеть, что свободный член в этой функции должен быть равен единице. Для

самоаффинного процесса, который можно также назвать монофрактальным, функция масштабирования является линейной $\zeta(q) = H_q - 1$. Применяя неравенство Гельдера к (25), можно показать, что эта функция всегда является вогнутой, а при $t \rightarrow \infty$ становится линейной. Это означает, что мультифрактальный процесс можно определить лишь на ограниченном интервале времени, поскольку начиная с некоторого горизонта должны проявляться монофрактальные свойства.

Мультифрактальный процесс также можно определить [Castaing, Gagne, et al. (1990)] через соотношение между функциями плотностей распределения его приращений, рассчитанных на различных интервалах длиной l и L , таких что $L = \lambda l$, $\lambda > 1$:

$$P_l(x) = \int G(\lambda, u) e^{-u} P_L(e^{-u}x) du, \quad (26)$$

где $P_l(\cdot)$ — функция плотности распределения приращений $\delta_l X_t$ процесса X_t на горизонте длиной l , т.е. $x = \delta_l X_t = X_{t+l} - X_t$ (напомним, что для стационарных процессов $\delta_l X_t \stackrel{L}{=} X_t$).

Таким образом, если X_t — процесс логарифма цены, то речь идет о распределениях логарифмических доходностей на разных горизонтах. Функция $G(\lambda, u)$, форма которой зависит лишь от соотношения длин горизонтов, называется ядром самоподобия (self-similarity kernel). В постейшем случае для самоаффинных процессов она имеет вид:

$$G(\lambda, u) = \delta(u - H \ln \lambda), \quad (27)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака⁹.

В монофрактальном случае для описания модификации распределений достаточно одной точки, так как формы P_l и P_L отличаются лишь фактором масштабирования. Это объясняет вырожденный характер функции (27).

В общем мультифрактальном случае уравнение (26) имеет простую интерпретацию. Распределение P_l представляет собой взвешенную суперпозицию масштабированных функций плотности распределения P_L , где распределение весов определяется ядром самоподобия. Другими словами, P_l определяется как геометрическая конволюция (свертка) между ядром самоподобия и плотностью распределения P_L . Ядро самоподобия также называется пропагатором мультифрактального процесса. Определение (26) понадобится нам в дальнейшем для установления мультифрактальных свойств мультипликативного каскада.

В эконофизической литературе последнего десятилетия можно найти ряд исследований фрактальных свойств волатильности цен акций и обменных курсов. Так, в [Schmitt, Schertzer, et al. (2000)]; [Pasquini and Serva (2000)] показано, что нелинейность масштабирующей функции $\zeta(q)$, наблюдаемая эмпирически, несовместима с аддитивными монофрактальными моделями стохастической волатильности, основанными на броуновском движении, которые обычно используются в финансах. В частности, мультифрактальные процессы могут быть порождены мультипликативным каскадом возмущений, который используется для моделирования турбулентности жидкостей и газов (об этом подробно будет сказано далее).

⁹ Напомним, что функция Дирака $\delta(x)$ равна 0 во всех точках, кроме $x = 0$, и бесконечности при $x = 0$, так что интеграл функции равен единице.

Свойства простых моделей типа GARCH и стохастической волатильности при временном агрегировании не позволяют адекватно моделировать ценовую динамику на различных горизонтах одновременно. В отношении модели GARCH(1,1) и ее аналога в форме стохастической волатильности в непрерывном времени показано [Drost and Nijman (1993)]; [Drost and Werker (1996)] свойство состоятельности при масштабировании (scale consistency), которое означает, что если доходности за короткие интервалы времени подчиняются GARCH(1,1), то и агрегированные на длинных горизонтах цены следуют GARCH(1,1) с теми же параметрами. При этом авторам пришлось ослабить предпосылку о независимости ошибок в модели (8), предполагая лишь, что коэффициенты α и β — лучшие линейные предикторы вариации, а остатки ϵ_t стационарны (так называемая «слабая форма» GARCH). Устойчивость при масштабировании одновременно является сильной и слабой стороной модели. С одной стороны, результаты статистического оценивания можно полагать независимыми от частоты наблюдения цен. С другой — строгая инвариантность модели не позволяет воспроизвести эволюцию формы распределения волатильности с изменением масштаба.

Таким образом, возникает необходимость в модели волатильности, которая не только позволяет воспроизвести длинные корреляции в доходности и (или) наличие «тяжелых» хвостов для данных с определенной частотой наблюдения, но и дает адекватные результаты на других временных горизонтах. В идеале появилась бы возможность моделировать изменение формы распределения доходности на разных горизонтах и воспроизводить мультифрактальные свойства соответствующего временного ряда.

6. Гипотеза о множественных горизонтах волатильности

До сих пор говорилось о временном агрегировании доходностей с сугубо статистической точки зрения. Отмечалось, что временной ряд доходностей, рассматриваемых на разных горизонтах, имеет различные свойства. Можно ли соотнести эти свойства с реальными временными горизонтами, на которых действуют экономические агенты?

Гипотеза о множественных горизонтах волатильности предполагает, что неоднородность в горизонтах принятия решений инвесторами является ключевым фактором для объяснения сложной динамики цен. Впервые соответствующая идея о том, что динамика цен определяется действиями участников рынка на разных временных горизонтах, была сформулирована Мюллером [Muller, Dacorogna, et al. (1997)]. Предполагается, что в волатильности можно выделить элементы, характерные для определенных частот наблюдения, которые имеют неодинаковую важность для разных типов участников рынка. К последним относятся спекулянты, использующие внутридневные колебания цен, дневные трейдеры, портфельные менеджеры и институциональные инвесторы, каждый из них имеет характерные скорость реакции на новости и частоту операций на рынке. С экономической точки зрения частоты колебаний цен ассоциируются с периодами принятия решений о распределении активов (интервалы времени между изменениями составов портфелей для различных участников рынка).

Параметрическая модель волатильности на множественных горизонтах в рамках подхода ARCH предложена в [Muller, Dacorogna, et al. (1997)]; [Dacorogna, Muller, et al. (1998)]. Текущая волатильность представлена как линейная функция квадратов доходности за различные периоды времени в прошлом:

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^j r_{t-i} \right)^2, \quad (28)$$

где $c_k \geq 0$ для всех $k = 0, \dots, n$, причем для $k = 0$ и $k = n$ неравенство выполняется строго;
 r_t — логарифмическая доходность (таким образом, выражение $\sum_{i=1}^j r_{t-i}$ представляет собой логарифмическую доходность на актив за период длительности j).

По построению получаемая модель неоднородной авторегрессионной условной гетероскедастичности (heterogeneous autoregressive conditional heteroscedasticity, HARCH) учитывает иерархическую структуру корреляций волатильности. Основными недостатками этой модели являются большое количество параметров и высокая корреляция между независимыми переменными, которые делают ее идентификацию весьма сложной. Авторы предлагают уменьшить размерность задачи, используя метод главных компонент. Позднее Корси [Corsi (2004)] сформулировал модель, по форме похожую на HARCH, но использующую в качестве независимых переменных реализованные волатильности на различных репрезентативных горизонтах (на дневном, недельном и месячном), что уменьшает число параметров и снижает корреляцию между регрессорами.

Зюмбах [Zumbach (2004)] предложил определить текущую (или эффективную) волатильность как взвешенную сумму нескольких компонент, соответствующих различным временным горизонтам. Рассматривается $n + 1$ репрезентативных горизонтов, длина которых τ_k , $k = 0, \dots, n$, возрастает диадически: $\tau_k = 2^{k-1} \tau_0$. Компонента волатильности, соответствующая горизонту k , определяется экспоненциальной скользящей средней:

$$\begin{aligned} \sigma_{t,k} &= \mu_k \sigma_{k, t-\delta t}^2 + (1 - \mu_k) r_t^2, \\ \mu_0 &= \exp\left(-\frac{\delta t}{\tau_0}\right) \mu_k = \exp\left(-\frac{\delta t}{\tau_0 2^{k-1}}\right), k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (29)$$

где r_t — текущая доходность на минимальном интервале времени δt , с которым наблюдаются цены ($\delta t \leq \tau_0$).

Предположив, что время измеряется в единицах, равных δt , положим для простоты $\delta t = 1$. Тогда, используя (29), можно определить доходности и волатильности на множественных горизонтах:

$$\begin{aligned} r_{t,k} &= \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} \left[\ln(S_t) - \ln\left(S_{t-\frac{\tau_k}{\tau_0}}\right) \right], \\ \sigma_{t,k} &= \mu_k \sigma_{k, t-1}^2 + (1 - \mu_k) r_{t,k}^2, \end{aligned} \quad (30)$$

где доходность $r_{t,k}$ для горизонта $k = 2^{k-1}$ определяется как обычное изменение логарифма цен, масштабируемое на минимальный период времени длиной $\delta t = 1$.

Наконец, результирующая (эффективная) волатильность, соответствующая единичному интервалу времени, записывается:

$$\sigma_t = \sum_{k=1}^r c 2^{-(k-1)\lambda} \sigma_{t,k} = \sum_{k=1}^n \omega_k \sigma_{t,k}, \quad (31)$$

где $\frac{1}{c} = \sum_{k=1}^n 2^{-(k-1)\lambda}$, что обеспечивает $\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$.

Убывание весов в (31) по степенному закону обеспечивает наличие длинной памяти в амплитудах доходности. Описанная модель оказывается близкой к FIGARCH, где для создания дальних корреляций используется оператор дробного дифференцирования (см. раздел 3), однако модель Зюмбаха имеет ясную интерпретацию в терминах множественных горизонтов. По сравнению с HARCH используется меньшее количество параметров (четыре). Однако отметим, что эмпирические результаты, полученные в (31), показывают лишь весьма незначительное увеличение прогнозной силы модели по сравнению с GARCH(1,1).

Еще одна модель волатильности на множественных горизонтах, на этот раз сформулированная в терминах стохастической волатильности, предложена Андерсеном и Боллерселевом [Andersen (1996)]; [Andersen and Bollerslev (1997)]. Неоднородность временных горизонтов интерпретируется в терминах различной устойчивости информационных потоков, влияющих на волатильность. Эти информационные потоки могут рассматриваться как факторы волатильности, значимые для различных типов инвесторов. Текущая доходность определяется через скрытую волатильность, которая полагается пропорциональной интенсивности агрегированного информационного потока V_t :

$$r_t = V_t^{\frac{1}{2}} \xi_t, \quad (32)$$

где $iid \xi_t$ — случайный процесс с нулевым матожиданием и единичной вариацией.

Информационный поток V_t представляет собой результат совместного воздействия n различных информационных потоков $V_{t,j}$, каждый из которых моделируется согласно лог-нормальной модели стохастической волатильности, заданной уравнениями типа (17):

$$V_{t,j} = \alpha_j + v_{t-1,j} + \varepsilon_{t,j} \quad (33)$$

где $v_{t,j} = \ln V_{t,j} - \mu_j$, $\mu_j = E(\ln V_{t,j})$ и $\varepsilon_{t,j}$ полагаются $iid N(0, \sigma_j^2)$;

α_j — параметр, отражающий устойчивость информационного потока j , который полагается стационарным, $0 \leq \alpha_j < 1$.

Агрегирование информационных потоков производится с помощью правила геометрической средней:

$$\ln V_t = \sum_{i=1}^N v_{t,i} \sum_{j=1}^N \mu_j. \quad (34)$$

При таком определении спектр $\ln V_t$ является средним из спектров авторегрессионных процессов, определенных для каждой компоненты уравнением (33).

Задавая гетерогенность параметра устойчивости α_j стандартным β -распределением, авторы исследуют динамику амплитуд доходностей и четных моментов доходности, а также демонстрируют наличие дальних корреляций. Кроме того, получаемый в форме смеси распределений процесс оказывается самоаффинным (т. е. автокорреляционная функция убывает гиперболически с одинаковой скоростью для всех степенных трансформаций амплитуд доходностей, и это независимо от длины интервалов времени, за которые рассчитываются доходности).

Модель Андерсена и Боллерслева носит, скорее, экспликативный характер (авторы пытаются объяснить дальние корреляции через неоднородность информационных потоков) в отличие от описанных ранее моделей, которые предполагают идентификацию параметров и практическое использование для прогнозирования. Однако остается необъясненным свойство мультифрактальности, которое наблюдается в волатильности эмпирически. Кроме того, отсутствует микроэкономическое обоснование модели, основанное на поведении экономических агентов.

Обоснование свойств волатильности цен в рамках моделей микроструктуры предлагалось в ряде исследований. В частности, Брок и Хомс [Brock and Hommes (1997)] вводят понятие адаптивного рационального равновесия, которое устанавливается на финансовом рынке в условиях рационального выбора инвесторами функций прогнозирования будущих цен. Множество функций прогнозирования задано *a priori*, а критерием выбора служит качество прогноза, получаемое с использованием этих функций на исторических данных. Искусственные рынки такого типа изучаются также в [Lux and Marchesi (2000)]; [Chiarella and He (2001)], где инвесторы по сходному принципу выбирают между чартистскими (экстраполирующими прошлое) и фундаментальными стратегиями. Воспроизводя некоторые эмпирические свойства динамики цен, эти модели в определенной степени объясняют парадокс избыточной волатильности. Однако они напрямую не учитывают неоднородность временных горизонтов. В аналогичном контексте Лебарон [LeBaron (2001b)] исследует выбор между стратегиями, которые используют предшествующие наблюдения цен на различных горизонтах.

Общими недостатками этих моделей являются априорное определение типов доступных экономическим агентам стратегий, а также отсутствие прямой аналитической связи со спецификацией процессов стохастической волатильности, используемых на практике. Так, практически одновременно с моделью искусственного рынка Лебарон [LeBaron (2001a)] предлагает простую модель стохастической волатильности с тремя факторами, каждый из которых задается процессом типа OU, описанным в разделе 4 с различной скоростью реверсии к средней. Модель стохастической волатильности такого типа для представления множественных горизонтов также предлагается в [Perello, Masoliver, et al. (2004)]. В [Molina, Han, et al. (2004)] исследуется способ ее оценки методом Монте-Карло — марковских цепей (Monte Carlo Markov chains, MCMC). Многофакторные модели, использующие процессы OU, хорошо воспроизводят дальние корреляции и могут учитывать эффект леввериджа, однако несостоятельны при временном агрегировании в силу конечности числа факторов и не имеют аналитической связи с моделями микроструктуры искусственного рынка. Модель [Barndorff-Nielsen and Shephard (2001)], где используется суперпозиция бесконечного числа процессов OU, лишена первого из этих недостатков.

7. Моделирование множественных горизонтов и турбулентность

Описанные выше модели волатильности на множественных горизонтах пытаются представить текущую волатильность как результат воздействия факторов (или компонент), изменяющихся с разной частотой. Такое описание волатильности имеет прямую аналогию в физике жидкостей и газов. В гидродинамике изучают явление турбулентности, при котором в течениях жидкостей и газов образуются вихри различных размеров, вследствие чего тер-

модинамические характеристики (скорость, температура, давление и плотность) подвержены случайным флуктуациям. Большая часть кинетической энергии турбулентного течения содержится в вихрях большого масштаба. Энергия каскадом переходит от этого большого масштаба к более коротким вихревым структурам. Этот процесс продолжается, порождая все более и более мелкие вихри, имеющие иерархическую структуру. Условие, при которых ламинарное (т. е. нормальное, невихревое) течение становится турбулентным, определяется критическим числом Рейнольдса, зависящим от вязкости жидкости и свойств течения. Основы статистической теории турбулентности заложены Колмогоровым [Колмогоров (1941)], а современный обзор можно найти, например, в [Фрик (2003)].

Впервые аналогия между турбулентностью и волатильностью на финансовом рынке была предложена в [Ghashghaie, Breymann, et al. (1996)]. Авторы заметили, что соотношение между плотностями распределения доходности на разных горизонтах аналогично соотношению между плотностью распределения дифференциалов скоростей между двумя точками в турбулентном потоке в зависимости от расстояния между этими точками (таким образом, вместо физического расстояния в финансах используется расстояние во времени). Каскад волатильности интерпретируется в терминах гипотезы о множественных горизонтах Мюллера [Muller, Dacorogna, et al. (1997)].

Аналитическая модель мультипликативного каскада волатильности (multiplicative cascade model, MCM) была предложена Гашге, Брейманом и Талкнером [Breymann, Ghashghaie, et al. (2000)]. В этой модели волатильность определяется как результат перемножения возмущений на различных горизонтах (частотах). Обозначим S_t дискретный стохастический процесс для цены акций и доходность $r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$. В MCM доходность определяется по формуле:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (35)$$

где ε_t — некоторый не зависящий от временных горизонтов *iid* шум;

σ_t — процесс стохастической волатильности, который можно разложить на ряд горизонтов τ_1, \dots, τ_n (здесь мы предполагаем, что τ_1 — самый длинный горизонт), так что волатильность на горизонте $k \in 2, \dots, n$ зависит от волатильности на более длинном горизонте $k-1$ и от некоторого процесса обновления $X_{t,k}$:

$$\sigma_{t,k} = \sigma_{k-1}(t) X_{t,k}. \quad (36)$$

Таким образом, мультипликативный каскад для волатильности принимает вид:

$$\sigma_t = \sigma_{t,n} = \sigma_0 \prod_{k=1}^n X_{t,k}. \quad (37)$$

В начальный момент времени t_0 все процессы обновления $X_{t,k}$ инициализируются как *iid* логнормальные случайные величины с математическим ожиданием $E(\ln X_{t,k}) = x_k$ и вариацией $\text{Var}(\ln X_{t,k}) = \lambda_k^2$. Для перехода от момента t_n к моменту $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ (напомним, что τ_n — самый короткий рассматриваемый горизонт) определяем:

$$X_{t_{n+1},1} = (1 - \mathbf{I}\{A_{t_{n+1},1}\}) X_{t_n,1} + \mathbf{I}\{A_{t_{n+1},1}\} \xi_{t_{n+1},1}, \quad (38)$$

где $A_{t_{n+1},1}$ — событие, соответствующее обновлению процесса $X_{t,1}$ в момент t_{n+1} ;

$\mathbf{I}\{\cdot\}$ — функция-индикатор;

$\xi_{t,1}$ — *iid* логнормальные случайные величины с параметрами μ и вариациями λ^2 .

В любой момент t_n событие $\{A_{t_{n+1}, 1}\}$ происходит с вероятностью p_1 . По аналогии $\{A_{t_{n+1}, k}\}$ определяется как событие обновления процесса $X_{t,k}$ в момент t_{n+1} . Динамика на горизонтах $k = 2, \dots, m$ определяется итеративно с помощью:

$$X_{t_{n+1}, k} = (1 - \mathbf{I}\{A_{t_{n+1}, k-1}\})[(1 - \mathbf{I}\{A_{t_{n+1}, k}\})X_{t_n, k} + \mathbf{I}\{A_{t_{n+1}, k}\}\xi_{t_{n+1}, k}], \quad (39)$$

где для $\forall k \xi_{t,k}$ — логнормальные iid случайные величины с параметрами μ и λ^2 .

Из уравнения (39) следует, что обновление на горизонте k в момент t_{n+1} происходит, либо если обновление произошло на предшествующем более длинном горизонте $k-1$, либо с вероятностью p_k , соответствующей событию $A_{t_{n+1}, k}$. Вероятности обновления $p_{(k)}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы средний интервал между двумя обновлениями на горизонте k был равен длине соответствующего горизонта τ_k . Для простоты можно рассматривать лишь диадические горизонты, т.е. такие, что $\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} = 2$ для $k \in \{2, \dots, n\}$. Используя свойства процесса Бернулли, можно показать, что вероятности обновления должны удовлетворять:

$$p_1 = 2^{1-n}, \quad p_k = \frac{2^{k-n} - 2^{k-n-1}}{1 - 2^{k-n-1}}, \quad k = 2, \dots, n. \quad (40)$$

Эмпирическая адекватность модели подтверждается свойствами ACF доходностей на различных горизонтах, определяемых стандартным образом: $r_{t,k} = \ln P_t - \ln P_{t-\tau_k}$. В [Arneodo, Muzy, et al. (1998)] показано, что при предположениях MCM автоковариационная функция логарифмов амплитуд доходности на любых горизонтах должна убывать как логарифмическая функция:

$$\text{Cov}(\ln|r_{(t+\Delta t), k}|, \ln|r_{t,k}|) \cong -\lambda^2 \ln \frac{\Delta t}{\tau_1}, \quad \Delta t > \tau_k. \quad (41)$$

Последнее соотношение также может использоваться для идентификации «самого длинного горизонта» волатильности [Muzy, Sornette, et al. (2001)]. С практической точки зрения модель MCM удобно рассматривать в вейвлетном ортонормальном базисе, что упрощает симуляции и позволяет получать аналитические результаты типа уравнения (41) [Arneodo, Muzy, et al. (1998)].

На рис. 9 и 10 показаны результаты симуляции MCM по сравнению с реальными данными для индекса CAC40. Количество горизонтов при симуляции выбрано равным 14, что позволяет воспроизвести скорость убывания выборочной автокорреляционной функции, а остальные параметры подбирались таким образом, чтобы обеспечить соответствие первых двух выборочных моментов оценкам, полученным на реальных данных. Обратим внимание, что на рис. 9 показаны результаты для доходностей, агрегированных в дневные интервалы, тогда как симулировались 15-минутные доходности. Это иллюстрирует важную особенность каскада волатильности: кластеризация волатильности и дальние корреляции сохраняются при временном агрегировании, т.е. на различных временных горизонтах.

Описанная выше модель MCM называется логнормальной, поскольку этому вероятностному закону соответствует распределение возмущений волатильности. Это ни в коем случае не означает, что результирующее распределение доходностей должно быть логнормальным.

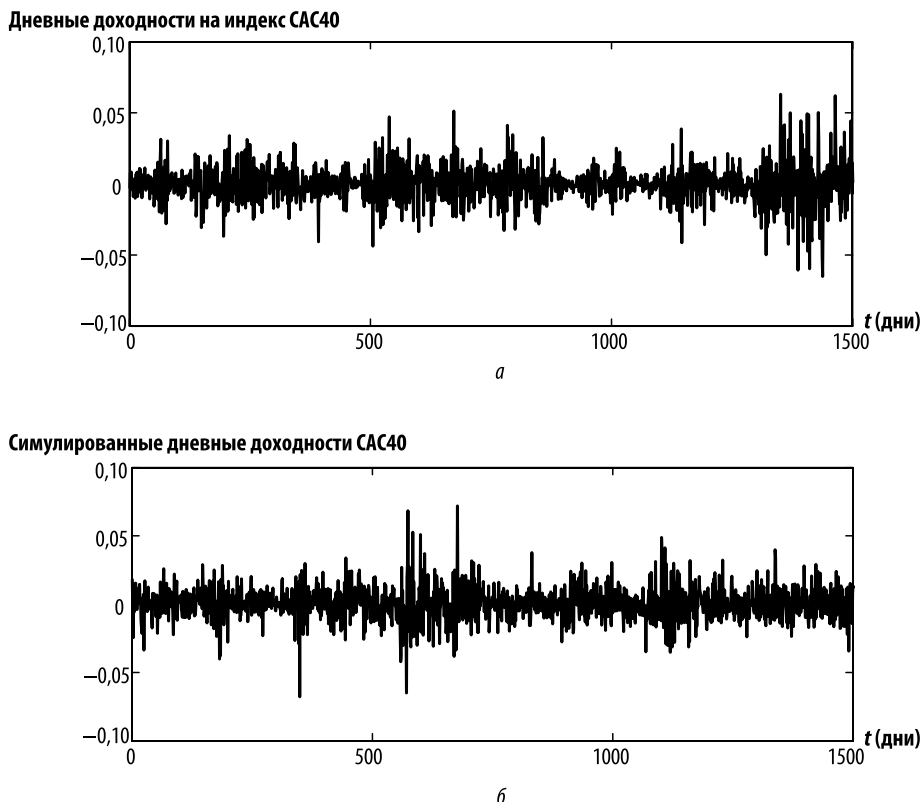


Рис. 9. Симуляция с помощью модели мультипликативного каскада и реальные данные (дневные доходности): *а* — дневные доходности на индекс CAC40 (Euronext, значения индекса CAC40 с 20 марта 1995 г. по 24 февраля 2005 г.); *б* — дневные доходности, симулированные с помощью модели мультипликативного каскада с 14 горизонтами (от 15 мин до 256 дней). Доходности симулируются за каждые 15 мин, а затем агрегируются до дневных интервалов

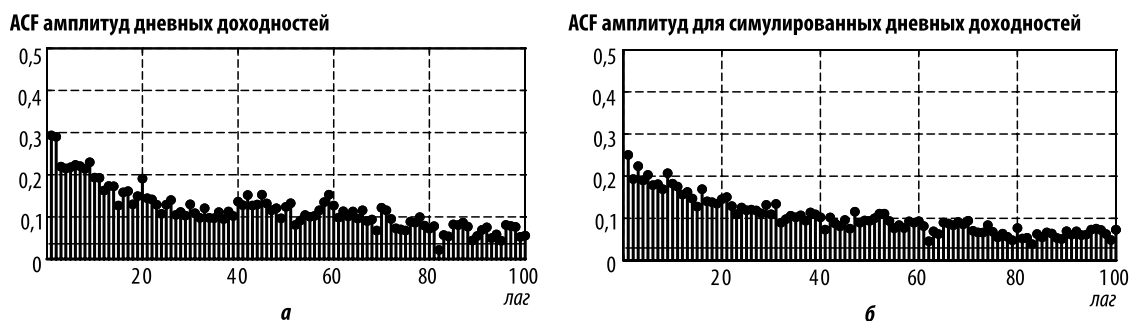


Рис. 10. Симуляция с помощью модели мультипликативного каскада и реальные данные (выборочная ACF амплитуд дневных доходностей CAC40):

а — выборочная ACF для амплитуд дневных доходностей на индекс CAC40 (Euronext, ежедневные значения индекса CAC40 с 20 марта 1995 г. по 24 февраля 2005 г.); *б* — выборочная ACF для данных, симулированных с помощью модели мультипликативного каскада с 14 горизонтами (от 15 мин до 256 дней).

Доходности симулируются за каждые 15 мин, а затем агрегируются до дневных интервалов

Так, ничто не мешает задать модель таким образом, чтобы на коротких горизонтах наблюдались «тяжелые» хвосты (см. об этом ниже). В описанной выше форме она позволяет симулировать данные, соответствующие по многим статистическим свойствам реально наблюдаемым в финансах. Однако ее практическое использование в таком виде затруднительно, поскольку отсутствуют четкая параметризация и способы оценки.

Связь между MCM (в данном случае мы говорим о мультипликативном каскаде в более общем смысле, отвлекаясь от конкретной спецификации в [Breymann, Ghashghaie, et al. (2000)], представленной выше) и мультифрактальными процессами изучается в [Muzy, Delour, et al. (2000)]. Рассмотрим диадические горизонты длиной $\tau_n = 2^{-n} \tau_0$. Приращение процесса X_t на интервале τ_k , обозначаемое $\delta_k X_t$, связано с приращением на самом длинном горизонте через:

$$\delta_k X_t = \left(\prod_{i=1}^k W_i \right) \delta_0 X_t, \quad (42)$$

где W_i — некоторый положительный *iid* случайный фактор.

В модели MCM процесс стохастической волатильности σ_t был определен аналогичным образом. Выражение (42) можно переписать в форме простого случайного блуждания в логарифмах локальной волатильности:

$$\omega_{t, k+1} = \omega_{t, k} + \ln W_{k+1}, \quad (43)$$

где $\omega_{t, k} = \frac{1}{2} \ln(|\delta_k X_t|^2)^{10}$.

Если возмущения $\ln W_i$ распределены по нормальному закону $N(\mu, \sigma^2)$, плотность распределения $\omega_{t, k}$, обозначаемая $P_k(\omega)$, удовлетворяет условию:

$$P_k(\omega) = (N(\mu, \sigma^2)^{*k} * P_0)(\omega), \quad (44)$$

где $*$ — оператор свертки, задаваемый для двух функций — $f(t)$ и $g(t)$ выражением $(f * g)(t) = \int f(u)g(t-u)du$.

Отметим, что уравнение (44) соответствует определению мультифрактальности в (26) с логнормальным пропагатором вида:

$$G_{\tau_k, \tau_0} = N(\mu, \sigma^2)^{*k} = N(k\mu, k\lambda^2). \quad (45)$$

Аналогичным образом мультифрактальный процесс, соответствующий (26), можно представить в виде мультипликативного каскада.

Из приведенного анализа следует, что модель MCM можно задать, используя мультифрактальное случайное блуждание (multi-fractal random walk, MRW). Класс таких процессов был предложен для моделирования волатильности в [Bacry, Delour, et al. (2001)] и затем обобщен в [Muzy and Bacry (2002)]; [Pochart and Bouchaud (2002)]. Дискретная версия MRW с шагом Δt получается суммированием $\frac{t}{\Delta t}$ случайных величин:

¹⁰ Заметим, что выражение (41) в новых обозначениях соответствует $\text{Cov}(\omega_{t+\delta t, k}, \omega_{t, k})$.

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{\frac{t}{\Delta t}} \delta X_{\Delta t, k}, \quad (46)$$

где $\delta X_{\Delta t, k}$ — шум, вариация которого задана стохастическим процессом:

$$\delta X_{\Delta t, k} = \exp(\omega_{\Delta t, k}) \varepsilon_{\Delta t}, \quad (47)$$

где $\omega_{\Delta t, k}$ — логарифм стохастической волатильности, как и в (43);

$\varepsilon_{\Delta t}$ — независимый от ω гауссовский шум.

Определение $\omega_{\Delta t, k}$ основано на форме ковариационной функции, соответствующей описанной выше MCM:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\omega_{\Delta t, k}, \omega_{\Delta t, l}) &= \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t, |k-l|}, \\ \rho_{\Delta t, m} &= \frac{T}{(|m|+1)\Delta t}, \quad |m| \leq \frac{T}{\Delta t} - 1, \\ \rho_{\Delta t, m} &= 1, \quad |m| > \frac{T}{\Delta t} - 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь T соответствует интегральному времени, т.е. самому большому горизонту, после которого перестают наблюдаться мультифрактальные свойства. Чтобы обеспечить конечную вариацию приращений процесса $X_{\Delta t}(t)$ при переходе к непрерывному времени через $\Delta t \rightarrow 0$, необходимо задать среднюю логарифмическую волатильность следующим образом:

$$E(\omega_{\Delta t, k}) = -\text{Var}(\omega_{\Delta t, k}) = -\lambda^2 \ln\left(\frac{T}{\Delta t}\right). \quad (49)$$

Модель MRW идентифицируется тремя параметрами: вариацией приращений процесса $X_{\Delta t}(t)$, вариацией приращений процесса логарифмических волатильностей (λ^2) и интегральным временем T . Эти параметры можно достаточно просто оценить, используя форму спектра и автокорреляционной функции. MRW также допускает обобщение в многомерном пространстве [Muzy and Bacry (2002)]. Однако такая экономичность параметризации ограничивает возможности точного моделирования взаимосвязей между волатильностями на различных горизонтах, как, например, в модели HARCH или в модели Зюмбаха (см. раздел 6). Линч и Зюмбах [Lynch and Zumbach (2003)], исследуя каскад волатильностей эмпирически через корреляции исторической и реализованной волатильности, отмечают, что структура этого каскада отличается от наблюдаемого в турбулентности. Это может быть связано с существованием характеристических горизонтов, соответствующих частоте операций на рынке разных типов инвесторов (дневные спекулянты, портфельные менеджеры, пенсионные фонды и пр.). По сравнению с моделями стохастической волатильности процессы типа MRW не позволяют учитывать эффект леввериджа (в явном виде). Кроме того, теряется интуитивно привлекательное для экономиста понятие реверсии волатильности к среднему уровню, присущее процессам OU. В [Anteneodo and Riera (2005)] предлагается модель аддитивно-мультипликативного каскада, которая дополняет описанную в этом разделе модель реверсивным эффектом, однако имеет существенно большую сложность.

Альтернативный подход к исследованию волатильности, также относящийся к эконометрике, состоит в том, чтобы непосредственным образом исследовать свойства эволюции распределений доходностей на различных горизонтах. Необходимой предпосылкой такого анализа является марковость каскада волатильности. Рассмотрим ряд горизонтов $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$ (в данном случае в отличие от предшествующего описания МСМ удобнее обозначать горизонты в порядке возрастания) и процесс $\delta_k X$ приращений на горизонте $\tau_k, k \in \{0, \dots, n\}$ стационарного процесса X_t для некоторого фиксированного t (это может быть процесс стохастической волатильности или скорректированный на тренд процесс цены актива, или его логарифм). Марковость для $\delta_k X$ по определению означает:

$$P_{k|k+1, \dots, n}(x) = P_{k|k+1}(x), k = 0, \dots, n-1, \quad (50)$$

где $P_{k|k+1}(\cdot)$ означает условную плотность распределения $\delta_k X$ при условии, что $\delta_{k+1} X$.

Поскольку

$$P_{k|k+1, \dots, n}(x) = \frac{P_{k, \dots, n}(x_k, \dots, x_n)}{P_{k+1, \dots, n}(x_{k+1}, \dots, x_n)}, \quad (51)$$

достаточно знать условные плотности распределения для последовательных горизонтов и распределение на самом длинном горизонте для определения совместного распределения $P_{0, \dots, n}$ всех приращений. Последнее свойство имеет особое значение для финансов. Используя его, можно построить алгоритм симуляции процесса с такими же вероятностными распределениями приращений на всех горизонтах, как и у имеющихся данных [Nawroth and Peinke (2006)]. Алгоритм симуляции необходим для реализации оценок методом Монте-Карло при решении задач оценки производных инструментов и управления портфелем.

Для проверки марковского свойства процесса обычно используется необходимое условие, задаваемое уравнением Чепмена—Колмогорова:

$$P_{m|k}(x) = \int P_{m|\delta_l X=u}(x) P_{l|k}(u) d(u), k < l < m, \quad (52)$$

которое проверяется для различных наборов трех приращений непосредственным сравнением правой и левой частей уравнений. Эмпирические данные по приращениям обменных курсов и волатильностям акций хорошо согласуются с (52) и не позволяют отвергнуть гипотезу марковости [Friedrich, Peinke, et al. (2000)]; [Renner, Peinke, et al. (2001a)]; [Ausloos and Ivanova (2003)]; [Бухбиндер и Чистилин (2005)]; [Cortines, Riera, et al. (2007)]. Заметим, что в МСМ мы делали предпосылку марковости неявным образом, считая волатильность на каждом горизонте результатом добавления мультипликативного возмущения к волатильности на предыдущем, более длинном горизонте.

Для марковских процессов условные плотности распределения удовлетворяют управляющему уравнению в форме разложения Крамерса—Мойала [Risken (1989), с. 48–50] (здесь длина горизонта τ полагается непрерывной):

$$-\tau \frac{\partial}{\partial \tau} P_{\tau|\tau_0}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^k D_k(x, \tau) P_{\tau|\tau_0}(x). \quad (53)$$

Коэффициенты $D_k(x, \tau)$ Крамерса—Мойала определяются как предел при $\Delta\tau \rightarrow 0$ условных моментов $M_k(\delta_{\tau} X, \tau, \Delta\tau)$:

$$D_k(x, \tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} M_k(x, \tau, \Delta\tau),$$

$$M_k(x, \tau, \Delta\tau) = \frac{\tau}{k! \Delta\tau} \int (u - \tau)^k P_{\tau - \Delta\tau | \tau}(u) du. \quad (54)$$

В общем случае все коэффициенты Крамерса—Мойала отличны от нуля, однако согласно теореме Поула, если $D_4(x, \tau) = 0$, все коэффициенты в разложении начиная с 3-го также равны нулю. Выполнение этого условия также проверяется эмпирически. В этом случае выражение (53) превращается в простое уравнение Фоккера—Планка (известное как второе уравнение Колмогорова):

$$-\tau \frac{\partial}{\partial \tau} P_{\tau | \tau_0}(x) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_1(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(x, \tau) \right] P_{\tau | \tau_0}. \quad (55)$$

Безусловная плотность распределения $\delta_\tau X$ на горизонте τ подчиняется тому же дифференциальному уравнению.

Уравнение Фоккера—Планка описывает плотность распределения стохастического процесса, задаваемого уравнением Ланжевана:

$$-\tau \frac{\partial}{\partial \tau} x(\tau) = D_1(x, \tau) + \sqrt{D_2(x, \tau)} f(\tau), \quad (56)$$

где $f(\tau)$ — сила Ланжевана, обычно моделируемая гауссовским белым шумом.

Таким образом, при выполнении определенных предпосылок уравнение для цен акций или их волатильности можно получить, оценивая коэффициенты Крамерса—Мойала с помощью (54) [Renner, Peinke, et al. (2001a)]; [Бухбиндер и Чистилин (2005)]; [Cortines, Riera, et al. (2007)]. При этом однозначно задается эволюция формы распределения доходности на различных горизонтах от нормального до распределения с «тяжелыми» хвостами. Так, в [Renner, Peinke, et al. (2001a)] для приращений обменных курсов установлена следующая форма коэффициентов:

$$D_1(x, \tau) = -\gamma x,$$

$$D_2(x, \tau) = \alpha \tau + \beta x^2. \quad (57)$$

Для стандартной мультифрактальной модели турбулентного каскада [Castaing, Gagne, et al. (1990)], описанной выше, коэффициенты Крамерса—Мойала имеют вид:

$$D_1(x, \tau) = -\gamma(\tau)x,$$

$$D_2(x, \tau) = \beta(\tau)x^2. \quad (58)$$

Сходство (57) и (58) говорит в пользу аналогии между турбулентностью и волатильностью. В [Ausloos and Ivanova (2003)] аналогичный анализ для логарифмических доходностей на индекс S&P500 дал сходные результаты для D_2 , однако D_1 оказался очень близок к нулю, что в терминах уравнения Ланжевана означает отсутствие восстанавливающей силы (силы трения в жидкости). Последний результат не подтверждается в [Cortines, Riera, et al. (2007)] на данных логарифмических доходностей бразильского фондового индекса Ibovespa. Кро-

ме того, авторы обнаруживают значимый линейный член в уравнении для D_2 для горизонтов, превышающих 1 день. Это означает существенное отклонение от классической мультифрактальной модели турбулентного каскада. Отметим, что подобное отклонение обнаруживается и на эмпирических данных для турбулентности в жидкостях [Renner, Peinke, et al. (2001b)].

В [Бухбиндер и Чистилин (2005)] коэффициенты уравнения Фоккера—Планка оцениваются для данных дневной реализованной волатильности индекса Доу—Джонса, рассчитанной по 5-минутным доходностям. Полученные оценки коэффициентов Крамерса—Мойала хорошо описываются уравнениями вида:

$$\begin{aligned} D_1(\sigma, \tau) &= -\sigma(a_1 + a_2 \ln \sigma), \\ D_2(\sigma, \tau) &= b_1 \sigma^2 (\exp b_2 \sigma). \end{aligned} \quad (59)$$

Первое уравнение в (59) учитывает нелинейность коэффициента восстанавливающей силы при низких уровнях волатильности, второе — отражает большую скорость возрастания диффузионного коэффициента, чем предполагает квадратическая функция, при высоких уровнях волатильности. При малых σ подстановка (59) в (55) дает стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее экспоненциальной модели OU. Эта модель также защищается в [Masoliver and Perello (2006)], исходя из совершенно иных соображений, основанных на свойствах автокорреляционной функции.

Большое количество методов и моделей, которые предлагаются для описания динамики волатильности на множественных горизонтах, свидетельствует о быстром развитии этого направления в финансах. О целостной теории волатильности на множественных горизонтах говорить пока рано, поскольку среди конкурирующих подходов еще нет явного лидерства. Кроме того, такая теория подразумевает развитие практических приложений, связанных с прогнозированием, оптимальным распределением активов и оценкой производных инструментов. Некоторый прогресс достигнут в каждом из этих направлений. В [Calvet and Fisher (2001)]; [Richrads (2004)] предлагаются методы прогнозирования мультифрактальных финансовых временных рядов. В нескольких исследованиях рассматривается оценка опционов в условиях волатильности на множественных горизонтах, которая задается многофакторной моделью [Fouque, Paranicolau, et al. (2003)]; [Fouque and Han (2004)]. Модель управления инвестиционным портфелем в условиях, когда цена акций задана мультифрактальными процессами, предложена в [Muzy, Sornette, et al. (2001)].

Особо отметим еще одно направление исследований, возникающее в связи с моделями волатильности на множественных горизонтах: построение индикатора волатильности, который отражал бы текущее состояние рынка с учетом не только амплитуды колебаний, но и их частоты. Как следует из приведенных нами теоретических соображений, рассмотрение волатильности одновременно на различных временных горизонтах привносит дополнительную информацию по сравнению с измерением лишь на каком-то одном из них. Эта информация может быть использована в первую очередь при принятии решений в динамическом управлении портфелем. Различные шкалы волатильности на множественных горизонтах, применимые для измерения волатильности независимо от вида конкретной модели динамики цен, предложены в [Zumbach, Dacorogna, et al. (2000)]; [Maillet and Michel (2003)]; [Maillet, Michel, et al. (2007)]; [Subbotin (2008)].

8. Заключение

Моделирование и измерение изменчивости цен акций и обменных курсов составляет один из важнейших элементов теории и практики управления инвестиционным портфелем, а также других разделов финансов. Мы рассмотрели понятие волатильности и проанализировали различные подходы к ее моделированию в дискретном и непрерывном времени (условную гетероскедастичность и стохастическую волатильность), показав различия и связи между ними. Построение моделей постоянно было направлено на то, чтобы более точно воспроизвести эмпирические свойства временных рядов цен — такие, как дальние корреляции в амплитудах доходности, их отсутствие в самих доходностях и «тяжелые» хвосты в вероятностных распределениях доходностей на коротких горизонтах.

Среди различных подходов мы особо выделили моделирование волатильности на множественных горизонтах, которое представляется нам наиболее перспективным. Этот подход позволяет учитывать свойства доходностей, проявляющиеся при их временном агрегировании, например, эволюцию форм вероятностных распределений при изменении интервалов времени, за которые рассчитываются доходности, и связанные с этим мультифрактальные свойства финансовых временных рядов. Мы рассмотрели различные классы моделей, учитывающих множественные горизонты, — от неоднородных ARCH-моделей до мультипликативных каскадов. Особая роль в построении теории волатильности на множественных горизонтах принадлежит методам, заимствованным из гидромеханики и других разделов статистической физики. Такое заимствование стало возможно вследствие обнаруженной аналогии между волатильностью и турбулентностью в жидкостях и газах.

Концепция волатильности на множественных горизонтах предполагает необходимость разработки методов ее измерения, учитывающих не только амплитуду, но и частотную составляющую колебаний доходностей. Информация, полученная на разных уровнях временного агрегирования (т.е. на разных горизонтах), может быть полезной, в частности, для практики управления активами¹¹.

Список литературы

Бухбиндер Г. Л., Чистилин К. М. Эмпирическая модель стохастической волатильности финансовых флуктуаций. Доклад на VI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. 29–31 октября 2005 года, г. Кемерово, Россия.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Доклады Академии наук СССР*. 1941. Т. 30. С. 299–303.

Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы. М.: Институт компьютерных исследований, 2003.

Alizadeh S., Brandt M., Diebold F. Range-based estimation of stochastic volatility models // *The Journal of Finance*. 2002. № 57(3):10 471 091.

Andersen T., Bollerslev T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts // *International Economic Review*. 1998. № 39(4). P. 885–905.

¹¹ К сожалению, за рамками данного обзора осталась проблема сравнительного анализа качества (прикладной дееспособности) различных моделей волатильности. — *Прим. науч. ред.*

Andersen T., Bollerslev T. Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics: Uncovering the long run in high frequency data // *Journal of Finance*. 1997. № 52. P. 975–1005.

Andersen T. Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility // *Journal of Finance*. 1996. № 51(1). P. 169–204.

Andersen T. Stochastic autoregressive volatility: a framework for volatility modelling // *Mathematical Finance*. 1994. № 4. P. 75–102.

Andersen T., Bollerslev T., Lange S. Forecasting financial market volatility: Sample frequency vis-a-vis forecast horizon // *Journal of Empirical Finance*. 1999. № 6(5). P. 457–477.

Andersen T., Bollerslev T., Diebold F., Labys P. The distribution of exchange rate volatility // *Journal of the American Statistical Association*. 2001. № 96. P. 42–55.

Andersen T., Bollerslev T., Diebold F., Labys P. Modeling and forecasting realized volatility // *Econometrica*. 2003. № 71(2). P. 579–625.

Anh V., Heyde C., Leonenko N. Dynamic models of long-memory processes driven by Levy noise // *Journal of Applied Probability*. 2002. № 39. P. 730–747.

Antenodo C., Riera R. Additive-multiplicative stochastic models of financial mean-reverting processes // *Physical Review E*. 2005. № 72. P. 26–106.

Arneodo A., Muzy J., Sornette D. Casual cascade in stock market from the “infrared” to the “ultraviolet” // *European Physical Journal B*. 1998. № 2. P. 277–282.

Asai M., McAleer M., Yu J. Multivariate stochastic volatility: A review // *Econometric Reviews*. 2006. № 25(2–3). P. 145–175.

Ausloos M., Ivanova K. Dynamical model and nonextensive statistical mechanics of a market index on large time windows // *Physical Review E*. 2003. № 68. P. 46–122.

Avellaneda M., Friedman C., Holmes R., Samperi D. Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization // *Applied Mathematical Finance*. 1997. № 4(1). P. 37–64.

Bacry E., Delour J., Muzy J. Multifractal random walk // *Physical Review E*. 2001. № 64. P. 26–103.

Bai X., Russel J. R., Tiao G. Kurtosis of garch and stochastic volatility models with non-normal innovations // *Journal of Econometrics*. 2003. № 114. P. 349–360.

Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // *Journal of Econometrics*. 1996. № 74(1). P. 3–30.

Bandi F., Russel J. Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling // *Review of Economic Studies*. 2008. № 75(2). P. 339–369.

Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models // *Journal of the Royal Statistical Society*. 2002b. Series B. № 64(2). P. 253–280,

Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Estimating quadratic variation using realized variance // *Journal of Applied Econometrics*. 2002a. № 17(5). P. 457–477.

Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics // *Journal of the Royal Statistical Society B*. 2001. № 63(2). P. 167–241.

Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps // *Journal of Financial Econometrics*. 2002c. № 2(1). P. 1–37.

Barone-Adesi G., Engle R., Mancini L. Garch option pricing model with filtered historical simulation // *Review of Financial Studies*, forthcoming. 2008.

- Bates D. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options // *Review of Financial Studies*. 1996. № 9. P. 69–107.
- Biais B., Glosten L., Spatt C. Market microstructure: A survey of microfoundations, empirical results and policy implications // *Journal of Financial Markets*. 2005. № 8. P. 217–264.
- Billio M., Caporin M., Gobbo M. Applied financial economics letters. Applied Financial // *Economics Letters*. 2006. № 2(2). P. 123–130.
- Black F., Scholes M. Pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. № 81(3).
- Black F. Noise // *Journal of Finance*. 1976. № 41.
- Bollerslev T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // *The Review of Economics and Statistics*. 1987. № 69(3). P. 542–547.
- Bollerslev T., Mikkelsen O. Modeling and pricing long memory in stock market volatility // *Journal of Econometrics*. 1996. № 73(1). P. 151–184.
- Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. № 31(3). P. 307–327.
- Bollerslev T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rate: A multivariate generalized arch approach // *Review of Economics and Statistics*. 1990. № 72. P. 498–505.
- Bollerslev T., Chou R., Kroner K. Arch modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence // *Journal of Econometrics*. 1992. № 52(1–2). P. 5–59.
- Breidt F., Crato N., de Lima P. The detection and estimation of long memory in stochastic volatility // *Journal of Econometrics*. 1998. № 83(1–2). P. 325–334.
- Breymann W., Ghoshghaie S., Talkner P. A stochastic cascade model for fx dynamics // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2000. P. 357–360.
- Brock W., Hommes C. A rational route to randomness // *Econometrica*. 1997. № 5. P. 1059–1095.
- Brooks C., Persaud G. Volatility forecasting for risk management // *Journal of Forecasting*. 2003. № 22(1). P. 1–22.
- Broto C., Ruiz E. Estimation methods for stochastic volatility models: a survey // *Journal of Economic Surveys*. 2004. № 18(5). P. 613–649.
- Calvet L., Fisher A. Forecasting multifractal volatility // *Journal of Econometrics*. 2001. № 105(1). P. 27–58.
- Capobianco E. State-space stochastic volatility models: a review of estimation algorithms // *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. 1996. № 12. P. 265–279.
- Castaing B., Gagne Y., Hofinger E. J. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence // *Physica D*. 1990. № 46(2). P. 177–200.
- Chan W., Maheu J. Conditional jump dynamics in stock market returns // *Journal of Business & Economic Statistics*. 2002. № 20(3). P. 377–389.
- Chernov M., Gallant R., Ghysels E., Tauchen G. Alternative models for stock price dynamics // *Journal of Econometrics*. 2003. № 116(1–2). P. 225–257.
- Chiarella C., He X.-Z. Asset price and wealth dynamics under heterogeneous expectations // *Quantitative Finance*. 2001. № 1(5). P. 509–526.

Chib S., Nardari F., Shephard N. Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models // *Journal of Econometrics*. 2006. № 134(2). P. 341–371.

Christensen K., Podolskij M. Realized range-based estimation of integrated variance // *Journal of Econometrics*. 2007. № 141(2). P. 323–349.

Christoffersen P., Diebold F. How relevant is volatility forecasting for financial risk management? // *The Review of Economics and Statistics*. 2000. № 82(1). P. 12–22.

Comte F., Renault E. Long memory in continuous-time stochastic volatility models // *Mathematical Finance*. 2004. № 8(4). P. 291–323.

Conrad J., Gultekin M., Kaul G. Profitability of short-term contrarian strategies: Implications for market efficiency // *Journal of Business & Economic Statistics*. 1997. № 15(3). P. 379–386.

Cont R. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues // *Quantitative Finance*. 2001. № 1(2). P. 223–236.

Corradi V., Distaso W. Semi-parametric comparison of stochastic volatility models using realized measures // *Review of Economic Studies*. 2006. № 73(3). P. 635–667.

Corsi F. A simple long memory model of realized volatility. Working Paper. University of Southern Switzerland, 2004.

Cortines A., Riera R., Anteneodo C. From short to fat tails in financial markets: a unified description // *The European Physical Journal B*. 2007. № 60(3). P. 385–389.

Cox J., Ingersoll J., Ross S. An intertemporal general equilibrium model of asset prices // *Econometrica*. 1985. № 53. P. 363–384.

Cutler D., Poterba J., Summers L. What moves stock prices? // *Journal of Portfolio Management*. 1989. № 15. P. 4–12.

Dacorogna M., Muller U., Dave R., Olsen R., Pictet O. Modelling Short-term Volatility with GARCH and HARCH models. N-Y: John Wiley, 1998. P. 161–176.

Ding Z., Granger C. Modelling volatility persistence of speculative returns: a new approach // *Journal of Econometrics*. 1996. № 73. P. 185–215.

Ding Z., Granger C., Engle R. A long memory property of stock market returns and a new model // *Journal of Empirical Finance*. 1993. № 1(1). P. 83–106.

Drost F., Nijman T. Temporal aggregation of garch processes // *Econometrica*. 1993. № 61(4). P. 909–927.

Drost T., Werker B. Closing the garch gap: Continuous time garch modeling // *Journal of Econometrics*. 1996. № 74(1). P. 31–57.

Duan J.-C. The garch option pricing model // *Mathematical Finance*. 1995. № 5(1). P. 13–32.

Duffie D., Filipovic D., Schachermayer W. Affine processes and applications in finance // *Annals of Applied Probability*. 2003. № 13. P. 984–1053.

Dupire B. Pricing and hedging with smiles. Proceedings of AFFI Conference // *La Baule*. 1993. June.

Dupire B. Pricing with a smile // *Risk Magazine*. 1994. № 7(1). P. 18–20.

Engle R., Bollerslev T. Modelling the persistence of conditional variances // *Econometric Reviews*. 1986. № 5(1). P. 1–50.

Engle R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of united kingdom inflation // *Econometrica*. 1982. № 50. P. 987–1008.

- Engle R. Dynamic conditional correlation — a simple class of multivariate garch models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2002. № 20(3). P. 339–350.
- Engle R., Lilien D., Robins R. Estimating time varying risk premia in the term structure: The arch-m model // *Econometrica*. 1987. № 55(2). P. 391–407.
- Eraker B., Johannes M., Polson N. The impact of jumps in returns and volatility // *Journal of Finance*. 2003. № 53. P. 1269–1300.
- Fama E. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work // *Journal of Finance*. 1970. № 25. P. 383–417.
- Fama E. The behaviour of stock market prices // *Journal of Business*. 1965. № 38. P. 34–105.
- Forsberg L., Ghysels E. Why do absolute returns predict volatility so well? // *Journal of Financial Econometrics*. 2007. № 5(1). P. 31–67.
- Fouque J.-P., Han C.-H. Asian options under multiscale stochastic volatility // *Contemporary Mathematics*. 2004. № 351. P. 125–138.
- Fouque J.-P., Papanicolaou G., Sircar R., Solna K. Multiscale stochastic volatility asymptotics // *Multiscale Modeling & Simulation*. 2003. № 2(1). P. 22–42.
- Friedrich R., Peinke J., Renner C. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market // *Physical Review Letters*. 2000. 84:5224–522.
- Ghashghaie S., Breyman W., Peinke J., Talkner P. and Dodge Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets // *Nature*. 1996. № 381. P. 767–770.
- Ghysels E., Santa-Clara P., Valkanov R. Predicting volatility: Getting the most out of return data sampled at different frequencies // *Journal of Econometrics*. 2006. № 131(1–2). P. 59–95.
- Glosten L., Jagannathan R., Runkle D. On the relation between the expected value and volatility of the nominal excess return on stocks // *Journal of Finance*. 1992. № 46. P. 1779–1801.
- Granger C., Joyeux R. An introduction to long memory time series models and fractional differencing // *Journal of Time Series Analysis*. 1980. № 1. P. 15–29.
- Granger C., Poon S.-H. Forecasting volatility in financial markets: A review // *Journal of Economic Literature*. 2003. № 41(2). P. 478–539.
- Hansen P. A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data // *Journal of Financial Econometrics*. 2005. № 3(4). P. 525–554.
- Hansen P., Lunde A. A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a garch(1,1) // *Journal of Applied Econometrics*. 2005. № 20(7). P. 873–889.
- Harvey A., Shephard N. Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns // *Journal of Business & Economic Statistics*. 1996. № 14(4). P. 429–434.
- Harvey A. Long Memory in Stochastic Volatility. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1998. P. 307–320.
- Hawkes R., Date P. Medium-term horizon volatility forecasting: A comparative study // *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. 2007. № 23(6). P. 465–481.
- Henderson V. Analytical comparisons of option prices in stochastic volatility models // *Mathematical Finance*. 2005. № 15(1). P. 49–59.
- Heston S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // *Review of Financial Studies*. 1993. № 6. P. 327–343.
- Heyde C. On modes of long-range dependence // *Journal of Applied Probability*. 2002. № 39(4). P. 882–888.

- Higgins M., Bera A. K. A class of nonlinear arch models // *International Economic Review*. 1992. № 33(1). P. 137–158.
- Hosking J. Fractional differencing // *Biometrika*. 1981. № 68. P. 165–176.
- Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities // *Journal of Finance*. 1987. № 42(2). P. 281–300.
- Hwang S., Satchell S., Pereira P. How persistent is stock return volatility? An answer with markov regime switching stochastic volatility models // *Journal of Business, Finance and Accounting*. 2007. № 34(5–6). P. 1002–1024.
- Jacquier E., Polson N., Rossi P. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat tails and correlated errors // *Journal of Econometrics*. 2004. № 122(1). P. 185–212.
- Kluppelberg C., Lindner A., Maller R. A continuous-time garch process driven by a levy process: Stationarity and second-order behaviour // *Journal of Applied Probability*. № 41(3). P. 601–622.
- Koopman S., Uspensky E. The stochastic volatility in mean model: Empirical evidence from international stock markets // *Journal of Applied Econometrics*. 2002. № 17(6). P. 667–689.
- Lanne M., Saikkonen P. Non-linear garch models for highly persistent volatility // *The Econometrics Journal*. 2005. № 8(2). P. 251–276.
- LeBaron B. Evolution and time horizons in an agent-based stock market // *Macroeconomic Dynamics*. 2001b. № 5. P. 225–254.
- LeBaron B. Stochastic volatility as a simple generator of apparent financial power laws and long memory // *Quantitative Finance*. 2001a. № 1(6). P. 621–631.
- Liesenfeld R., Richard J. Univariate and multivariate stochastic volatility models: Estimation and diagnostics // *Journal of Empirical Finance*. 2003. P. 1–27.
- Ling S., McAleer M. Asymptotic theory for a vector arma-garch model // *Econometric Theory*. № 19. P. 278–308.
- Ling S., McAleer M. Necessary and sufficient moment conditions for the garch(r, s) and asymmetric power garch(r, s) models // *Econometric Theory*. 2002a. № 18. P. 722–729.
- Ling S., McAleer M. Stationarity and the existence of moments of a family of garch processes // *Journal of Econometrics*. 2002b. № 106. P. 109–117.
- Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // *The Review of Economics and Statistics*. 1965. № 47(1). P. 13–39.
- Liu J. Portfolio selection in stochastic environments // *Review of Financial Studies*. 2007. № 20(1). P. 1–39.
- Liu M. Modeling long memory in stock market volatility // *Journal of Econometrics*. 2000. № 99(1). P. 139–171.
- Lobato I., Velasco C. Long memory in stock market trading volume // *Journal of Business & Economic Statistics*. 2000. № 18(4). P. 410–427.
- Lux T., Marchesi M. Volatility clustering in financial markets: A microsimulation of interacting agents // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2000. № 3(4). P. 675–702.
- Lynch P., Zumbach G. Market heterogeneities and the causal structure of volatility // *Quantitative Finance*. 2003. № 3(4). P. 320–331.
- Maghsoodi Y. Exact solution of a martingale stochastic volatility option problem and its empirical evaluation // *Mathematical Finance*. 2005. № 17(2). P. 249–265.

- Maillet B., Michel T. An index of market shocks based on multiscale analysis // *Quantitative Finance*. 2003. № 3(2). P. 88–97.
- Maillet B., Michel T., Subbotin A. A Revised Index of Market Shocks: A New Multi-horizon Richter Scale for Stock Markets. 2007. JMA conference paper. Fribourg. Switzerland. 2007. 31 May — 1 June.
- Mandelbrot B., Taqqu M. Robust r/s analysis of long run serial correlation // *Bulletin of the International Statistical Institute*. Vol. 48. Book 2. Manila: Proceedings of the 42nd session of the International Statistical Institute, 1979. P. 69–104.
- Mandelbrot B., van Ness J. Fractional brownian motion, fractional noises and applications // *SIAM Review*. 1968. № 10. P. 422–437.
- Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // *Journal of Business*. 1963. № 36. P. 394–419.
- Mandelbrot B. When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models // *Review of Economics and Statistics*. 1971. № 53(3). P. 225–236.
- Markowitz H. Portfolio selection // *Journal of Finance*. 1952. № 7(1). P. 77–91.
- Marple S. Digital Spectral Analysis. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- Martens M., van Dijk D. Measuring volatility with the realized range // *Journal of Econometrics*. 2007. № 138(1). P. 181–207.
- Martens M., Zein J. Predicting financial volatility: High-frequency time-series forecasts vis-a-vis implied volatility // *Journal of Futures Markets*. 2004. № 24(11). P. 1005–1028.
- Masoliver J., Perello J. Multiple time scales and the exponential ornstein-uhlenbeck stochastic volatility model // *Quantitative Finance*. 2006. № 6(5). P. 423–433.
- McAleer M., Medeiros M. Realized volatility: A review // *Econometric Reviews*. 2008. № 27(1–3). P. 10–45.
- Merton R. Theory of rational option pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. № 4. P. 141–183.
- Molina G., Han C. H., Fouque J. P. MCMC Estimation of Multiscale Stochastic Volatility Models. University of California, 2004 [Unpublished manuscript].
- Morimune K. Volatility models // *The Japanese Economic Review*. 2007. № 58(1). P. 1–23.
- Muller U., Dacorogna M., Dave R., Olsen R., Pictet O., von Weizsacker J. Volatilities of different time resolutions — analyzing the dynamics of market components // *Journal of Empirical Finance*. 1997. № 4. P. 213–239.
- Muzy J., Delour J., Bacry E. Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model // *The European Physical Journal B*. 2000. № 17(3). P. 537–548.
- Muzy J.-F., Bacry E. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws // *Physical Review E*. 2002. № 66(5). P. 56–121.
- Muzy J.-F., Sornette D., Delour J., Arneodo A. Multifractal returns and hierarchical portfolio theory // *Quantitative Finance*. 2001. № 1(1). P. 131–148.
- Nawroth A., Peinke J. Multiscale reconstruction of time series // *Physics Letters A*. 2006. № 360(2). P. 234–237.
- Nelson D. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach // *Econometrica*. 1991. № 59. P. 347–370.

Pasquini M., Serva M. Clustering of volatility as a multiscale phenomenon // *The European Physical Journal B*. 2000. № 16(1). P. 195–201.

Perello J., Masoliver J., Bouchaud J.-P. Multiple time scales in volatility and leverage correlations: A stochastic volatility model // *Applied Mathematical Finance*. 2004. № 11. P. 27–50.

Pochart B., Bouchaud J.-P. The skewed multifractal random walk with applications to option smiles // *Quantitative Finance*. 2002. № 2(4). P. 303–314.

Renner C., Peinke J., Friedrich R. Evidence of markov properties of high frequency exchange rate data // *Physica A*. 2001a. № 298(3). P. 499–520,

Renner C., Peinke J., Friedrich R. Experimental indications for markov properties of small-scale turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. 2001b. № 433. P. 383–409.

Richrads G. A fractal forecasting model for financial time series // *Journal of Forecasting*. 2004. № 23(8): P. 586–601.

Risken H. The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

Ritchken P., Trevor R. Pricing options under generalized garch and stochastic volatility processes // *Journal of Finance*. 1999. № 54(1). P. 377–402.

Schmitt F., Schertzer D., Lovejoy S. Multifractal fluctuations in finance // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2000. № 3(3). P. 361–364.

Scott L. Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1987. № 22. P. 419–438.

Sentana E. Quadratic arch models // *Review of Economic Studies*. 1995. № 62(4). P. 639–661.

Sharpe W. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // *Journal of Finance*. 1964. № 19(3).

So M., Lam K., Li W. A stochastic volatility model with markov switching // *Journal of Business & Economic Statistics*. № 16(2). P. 244–253.

Stein E., Stein J. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach // *Review of Financial Studies*. 1991. № 4. P. 727–752.

Subbotin A. A multi-horizon scale for volatility // CES Working Paper. 2008. № 20. [University of Paris-1 (Pantheon — Sorbonne)].

Taylor S. Financial Returns Modelled by the Product of two Stochastic Processes — a Study of the Daily Sugar Prices 1961–1975. North-Holland: Amsterdam, 1982. Vol. 1. P. 203–226.

Taylor S. Modelling stochastic volatility: A review and comparative study // *Mathematical Finance*. 1994. № 4(2). P. 183–204.

Woerner J. Estimation of integrated volatility in stochastic volatility models // *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. 2005. № 21(1). P. 27–44.

Zhou B. High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates // *Journal of Business & Economic Statistics*. 1996. № 14(1). P. 45–52.

Zumbach G. Volatility processes and volatility forecast with long memory // *Quantitative Finance*. 2004. № 4(1). P. 70–86.

Zumbach G., Dacorogna M., Olsen J., Olsen R. Measuring shocks in financial markets // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2000. № 3(3). P. 347–355.